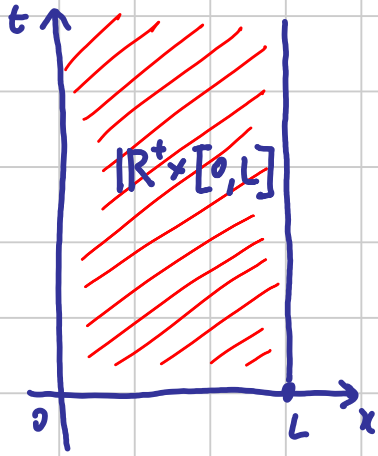
Metodi Matematici - Lez. 17

Titolo nota

26 novembre 2018 (14.00-15.45) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

EQUAZIONE DELLE ONDE - CASO CORDA LIMITATA

PROBLEMA Trovare $u(t,x) \in C^2(\mathbb{R}^+ \times [0,L])$ tale che:



$$
\begin{cases}
u_{tt}(t,x) = c^2 u^2_{xx}(t,x) & (1) \\
u(0,x) = f(x) & (2) \\
u_t(0,x) = g(x) & (3) \\
u(t,0) = u(t,L) = 0 \quad \forall t \geq 0 & (4)
\end{cases}
$$

dove $f(x) \in C^2([0,L])$ e $g(x) \in C^1([0,L])$ soddisfano le condizioni di compatibilità $f(0) = g(0) = 0 = f(L) = g(L)$.

SOLUZIONE In realtà esibiremo come soluzione non una precisa $u(t,x)$, ma una serie che converge a $u(t,x)$. Come prima cosa cerchiamo una famiglia numerabile di funzioni che soddisfino l'equazione, dopodiché vedremo come utilizzarle per scrivere una serie che converga ad una soluzione $u(t,x)$ che soddisfi anche i dati iniziali.

Cerchiamo quindi delle soluzioni di (1) che soddisfino anche (4) e siano della forma particolare:

$$u(t,x) = X(x) \cdot T(t) \tag{5}$$

Poiché:

$$u_{tt}(t,x) = X(x) \cdot T''(t)$$

e

$$u_{xx}(t,x) = X''(x) \cdot T(t)$$

la (5) soddisfa l'equazione (1) se e solo se:

$$(6) \qquad X(x)\,T''(t) = c^2 X''(x)\,T(t)$$

Si noti che per tutti i (t,x) per i quali $u(t,x) \neq 0$ la (6) può riscriversi come:

$$(7) \qquad \frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Poiché il primo membro di (7) non contiene x e il secondo non contiene t, vale l'uguaglianza se e solo se i due membri sono costanti, cioè quando $\exists\, k \in \mathbb{R}$ tale che:

$$\begin{cases} \dfrac{X''(x)}{X(x)} = k \\[2ex] \dfrac{T''(t)}{T(t)} = c^2 k \end{cases}$$

Cerchiamo quindi $k \in \mathbb{R}$ $\;X(x) \in C^2([0,L])$ e $T(t) \in C^2([0,+\infty))$ tali che

$$\begin{matrix} (8) \\ (9) \end{matrix} \qquad \begin{cases} X''(x) = k \cdot X(x) \\ T''(t) = c^2 k\, T(t) \end{cases}$$

Ricordiamo inoltre che vogliamo che sia soddisfatta anche la proprietà (4), cioè che

$$X(0)\,T(t) = X(L)\,T(t) = 0 \qquad \forall t \in [0,+\infty)$$

che, se $T(t)$ non è identicamente nulla, equivale a dire:

$$(10) \qquad X(0) = X(L) = 0$$

Cominciamo quindi a chiederci per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ c'è una soluzione di $X(x)$ non identicamente nulla di (8) e (10), cioè del problema:

$$\begin{cases} X''(x) - k X(x) = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{I}}$ Se $k = 0$ si ottiene $X(x) = ax + b$ e quindi l'unico modo di soddisfare $X(0) = 0 = X(L)$ è che sia $X(x) \equiv 0$.
Quindi se $k=0$ l'unica soluzione è quella identicamente nulla.

$\boxed{\text{II}}$ Se $k > 0$ il polinomio caratteristico è $\lambda^2 - k = 0$ ed ha 2 radici reali distinte $\lambda = \pm\sqrt{k}$, quindi la soluzione generale dell'equazione è:

$$X(x) = \alpha e^{-x\sqrt{k}} + \beta e^{x\sqrt{k}},$$

che soddisferà anche i dati al bordo se e solo se:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha e^{-L\sqrt{k}} + \beta e^{L\sqrt{k}} = 0 \end{cases}$$

cioè se e solo se $\alpha = \beta = 0$.
Quindi anche per $k > 0$ l'unica soluzione è quella identicamente nulla.

$\boxed{\text{III}}$ Invece, se $k < 0$ poniamo $\omega = -\sqrt{k}$, in modo da avere $k = -\omega^2$, cosicché il polinomio caratteristico è $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ e ha 2 radici immaginarie $\lambda = \pm i\omega$, per cui la soluzione generale dell'equazione è:

$$X(x) = \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x)$$

che soddisfa anche il dato al bordo se e solo se:

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha \cos(\omega L) + \beta \sin(\omega L) = 0 \end{cases}$$

Ciò significa che se $\omega L \neq n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$ l'unica soluzione è ancora solo quella identicamente nulla.
Invece, se per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ prendiamo $\omega L = n\pi$, si ottiene la soluzione non identicamente nulla

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right)$$

Abbiamo quindi trovato che:

$$(11) \quad \begin{cases} X''(x) = k \cdot X(x) \\ T''(t) = c^2 k\, T(t) \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

ha una soluzione $X(x)$ non identicamente nulla se e solo se k è della forma:

$$k_n = -\omega_n^2 = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad \text{con } n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

e che in tal caso la soluzione trovata è del tipo:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

eventualmente moltiplicata per una costante.

Ora per ciascun k_n troviamo anche $T(t)$.

Risolvendo:

$$T''(t) - c^2 k_n T(t) = 0$$

cioè:

$$T''(t) + \left(\frac{c\pi n}{L}\right)^2 T(t) = 0$$

si ottiene come soluzione generale:

$$T(t) = \alpha \cos\left(\frac{c\pi n}{L}t\right) + \beta \sin\left(\frac{c\pi n}{L}t\right) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Ciò significa che $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$, se k è della forma:

$$k_n = -\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2$$

come soluzione $T(t)$ di (11) potremmo prendere sia:

$$T_n(t) = \cos\left(\frac{c\pi n}{L}t\right)$$

sia

$$\tilde{T}_n(t) = \sin\left(\frac{c\pi n}{L}t\right)$$

Quindi, se per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, definiamo:

$$u_n(t,x) = X_n(x)\,T_n(t) = \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)\cos\left(\frac{c\pi n}{L}t\right)$$

$$v_n(t,x) = X_n(x)\,\Upsilon_n(t) = \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)\sin\left(\frac{c\pi n}{L}t\right)$$

otteniamo che tutte le u_n e le v_n sono soluzioni non identicamente nulle di (1) e (4).

Ciò significa che presa la serie:

(12) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n u_n(t,x) + \beta_n v_n(t,x)$$

se i coefficienti α_n e β_n sono tali che la serie converge a $u(t,x)$ con tutte le derivate fino al II° ordine, allora anche $u(t,x)$ è soluzione di (1) e (4).

Se vogliamo che $u(t,x)$ soddisfi anche le condizioni iniziali (2) e (3) bisogna che:

$$f(x) = u(0,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n u_n(0,x) + \beta_n v_n(0,x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)\cos\left(\frac{c\pi n}{L}\cdot 0\right) + \beta_n \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)\sin\left(\frac{c\pi n}{L}0\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$$

e che:

$$g(x) = u_t(0,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \partial_t u_n(0,x) + \beta_n \partial_t v_n(0,x)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)\cdot\left(-\frac{c\pi n}{L}\right)\sin\left(\frac{c\pi n}{L}\cdot 0\right) + \beta_n \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)\left(\frac{c\pi n}{L}\right)\cos\left(\frac{c\pi n}{L}0\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n \frac{c\pi n}{L} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right)$$

cioè che:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \quad e \quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n \frac{c\pi n}{L} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right)$$

Basterà quindi prolungare $f(x)$ e $g(x)$ per disparità a tutto $[-L, L]$ e poi prendere α_n e β_n in modo che:

$$\alpha_n = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) dx$$

$$\beta_n \cdot \frac{c\pi n}{L} = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} g(x) \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) dx$$

Con tali scelte di α_n e β_n la (12) è la soluzione cercata.

Per mostrare che la soluzione di (1), (2), (3) e (4) è unica, osserviamo che se $u(t,x)$ e $v(t,x)$ fossero entrambe soluzioni, allora la loro differenza $w(t,x) = u(t,x) - v(t,x)$ dovrebbe soddisfare:

$$(13) \qquad \begin{cases} w_{tt}(t,x) = c^2 w_{xx}(t,x) \\ w(0,x) = 0 \\ w_t(0,x) = 0 \\ w(t,0) = w(t,L) = 0 \end{cases}$$

Per avere l'unicità basterà quindi mostrare che se $w(t,x)$ soddisfa (13) allora necessariamente $w(t,x) \equiv 0$.

A tale scopo introduciamo la quantità:

$$E(t) = \int_0^L w_t^2(t,x) + c^2 w_x^2(t,x) \, dx$$

che prende il nome di Energia della soluzione al tempo t.

Osserviamo che:

$$E'(t) = \int_0^L 2\, w_t\, w_{tt} + 2c^2 w_x\, w_{xt}\, dx =$$

integrando per parti

$$= \int_0^L 2\, w_t\, w_{tt}\, dx + 2c^2 \int_0^L w_x \cdot (w_t)_x\, dx =$$

PERCHÉ $w(t,0)$ e $w(t,L)$ SONO IDENTICAMENTE NULLE

$$= \int_0^L 2\, w_t\, w_{tt}\, dx + 2c^2 \left(\underbrace{\Big[w_x\, w_t \Big]_{x=0}^{x=L}}_{=0} - \int_0^L w_{xx}\, w_t\, dx \right) =$$

$$= \int_0^L 2\, w_t\, w_{tt} - 2c^2 w_t\, w_{xx}\, dx =$$

Perché $w(t,x)$ soddisfa equazione delle onde

$$= \int_0^L 2\, w_t \cdot \underbrace{\left(w_{tt} - c^2 w_{xx} \right)}_{=0} dx = 0$$

Quindi $E'(t) = 0$ e perciò $E(t) = \text{costante} = E(0) = 0$.

Ma allora, dal fatto che

$$E(t) = \int_0^L w_t^2 + c^2 w_x^2\, dx = 0 \qquad \forall t \geq 0$$

essendo l'integranda continua e non negativa, deve essere necessariamente:

$$w_t^2(t,x) + c^2\, w_x^2(t,x) = 0 \qquad \forall t,x \in [0,+\infty) \times [0,L]$$

da cui segue:

$$\nabla w(t,x) = 0 \qquad \forall t,x \in [0,+\infty) \times [0,L]$$

e quindi

$$w(t,x) = \text{costante}$$

Quindi, essendo $w(t,x) = 0$ per $t=0$ lo è anche $\forall t > 0$.

Quindi $w(t,x)$ è identicamente nulla.