Metodi Matematici - Lez. 18+Exe

Titolo nota

27 novembre 2018 (9.30-11.15, 11:30-12:15) - docente: Prof. **E. Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

EQUAZIONE DELLE ONDE : CORDA ILLIMITATA

TEOREMA 1 Date $f \in C^2(\mathbb{R})$ e $g \in C^1(\mathbb{R})$, esiste unica $u(t,x) \in C^2([0,+\infty) \times \mathbb{R})$ che soddisfa il problema di Cauchy:

$$(1) \quad \begin{cases} u_{tt}(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x) \\ u(0,x) = f(x) \\ u_t(0,x) = g(x) \end{cases}$$

ed è data dalla formula:

$$(2) \quad u(t,x) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\, dy$$

DIMO ESISTENZA: Basta mostrare che la (2) soddisfa il problema.
A tale scopo calcoliamo u_{tt} e u_{xx}. Derivando ripetutamente la (2) si ha:

$$u_x(t,x) = \frac{1}{2}\left(f'(x+ct) + f'(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\cdot\left(g(x+ct) - g(x-ct)\right)$$

$$u_{xx}(t,x) = \frac{1}{2}\left(f''(x+ct) + f''(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\left(g'(x+ct) - g'(x-ct)\right)$$

$$u_t(t,x) = \frac{c}{2}\left(f'(x+ct) - f'(x-ct)\right) + \frac{1}{2}\left(g(x+ct) + g(x-ct)\right)$$

$$u_{tt}(t,x) = \frac{c^2}{2}\left(f''(x+ct) + f''(x-ct)\right) + \frac{c}{2}\left(g'(x+ct) - g'(x-ct)\right) = c^2 u_{xx}(t,x)$$

Quindi $u(t,x)$ soddisfa l'equazione.
Per mostrare che soddisfa anche le condizioni iniziali basta osservare che:

$$u(0,x) = \frac{f(x) + f(x)}{2} + \frac{1}{2c} \int_x^x g(y)\, dy = f(x)$$

e

$$u_t(0,x) = \frac{c}{2}\left(f'(x) - f'(x)\right) + \frac{1}{2}\left(g(x) + g(x)\right) = g(x)$$

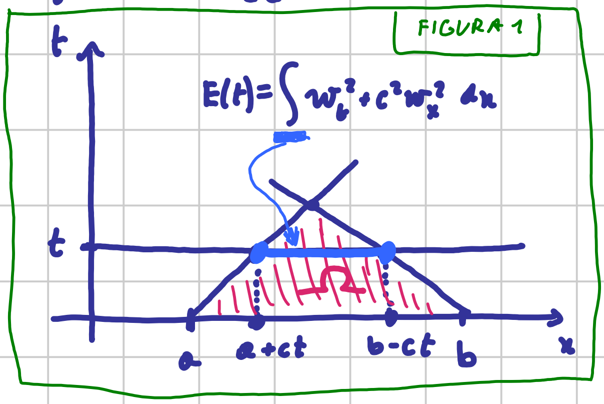
UNICITÀ: Se $u(t,x)$ e $v(t,x)$ sono 2 soluzioni di (1) allora, detto $w(t,x)=u(t,x)-v(t,x)$ si ottiene che $w(t,x)$ soddisfa

$$(3) \qquad \begin{cases} w_{tt}(t,x) = c^2 w_{xx}(t,x) \\ w(0,x) = 0 \\ w_t(0,x) = 0 \end{cases}$$

Per dimostrare l'unicità (cioè che $u(t,x)=v(t,x)$) basterà quindi dimostrare che l'unica soluzione di (3) è quella identicamente nulla.

A tale scopo, per ogni $[a,b] \subset \mathbb{R}$ e per ogni $t \leq \frac{b-a}{2c}$ introduciamo la quantità:

$$E(t) = \int_{a+ct}^{b-ct} w_t^2(t,x) + c^2 w_x^2(t,x)\, dx$$



Ovviamente $E(t) \geq 0$, perché l'integranda è positiva, ed $E(0)=0$ perché i dati iniziali per $w(t,x)$ sono nulli.

Se dimostriamo che $E'(t) \leq 0$ per ogni t, avremo anche che $E(t) \leq E(0) = 0$ per ogni t che, combinato al fatto che $E(t) \geq 0$, ci garantisce che $E(t)$ è identicamente nulla.

Calcoliamo quindi $E'(t)$.

$$E'(t) = \left(\int_{a+ct}^{b-ct} w_t^2(t,x) + c^2 w_x^2(t,x)\, dx \right)' =$$

$$= \left(w_t^2(t,b-ct) + c^2 w_x^2(t,b-ct) \right) \cdot (-c) - \left(w_t^2(t,a+ct) + c^2 w_x^2(t,a+ct) \right) \cdot c +$$

$$+ \int_{a+ct}^{b-ct} 2 w_t w_{tt} + 2c^2 w_x w_{xt}\, dx =$$

$$= -c\cdot\left(w_t^2(t,b-ct)+c^2w_x^2(t,b-ct)+w_t^2(t,a+ct)+c^2w_x^2(t,a+ct)\right)+$$

$$+\int_{a+ct}^{b-ct} 2w_t w_{tt}\,dx + \boxed{\int_{a+ct}^{b-ct} 2c^2 w_x\cdot(w_t)_x\,dx} =$$

INTEGRANDO PER PARTI

$$= -c\cdot\left(w_t^2(t,b-ct)+c^2w_x^2(t,b-ct)+w_t^2(t,a+ct)+c^2w_x^2(t,a+ct)\right)+$$

$$+\int_{a+ct}^{b-ct} 2w_t w_{tt}\,dx + \boxed{2c^2\left[w_x\cdot w_t\right]_{a+ct}^{b-ct} - \int_{a+ct}^{b-ct} 2c^2 w_{xx}\,w_t\,dx} =$$

$$= -c\cdot\left(w_t^2(t,b-ct)+c^2w_x^2(t,b-ct)+w_t^2(t,a+ct)+c^2w_x^2(t,a+ct)\right)+$$

$$+2c^2w_x(b-ct)\,w_t(b-ct)-2c^2w_x(a+ct)\,w_t(a+ct)+\int_{a+ct}^{b-ct}2w_t\underbrace{\left(w_{tt}-c^2w_{xx}\right)}_{=0}dx=$$

$$=-c\left(w_t(t,b-ct)-w_x(t,b-ct)\right)^2-c\left(w_t(t,a+ct)+w_x(t,a+ct)\right)^2+0\leq 0$$

Quindi $E'(t)\leq 0$ e sappiamo già che questo ci basta per dedurre che $E(t)$ è identicamente nullo finché $t<\frac{b-a}{2c}$.

Ne deduciamo che, detto Ω il dominio triangolare evidenziato in rosso in figura 1, abbiamo:

$$\int_\Omega w_t^2(t,x)+c^2w_x^2(t,x)\,dx\,dt=0$$

e quindi, dal fatto che la funzione integranda è continua e non negativa, deduciamo che, se il suo integrale su Ω vale 0, essa deve essere identicamente nulla su tutto Ω. Da ciò segue che:

$$\nabla w(t,x)=0 \quad \text{su tutto } \Omega$$

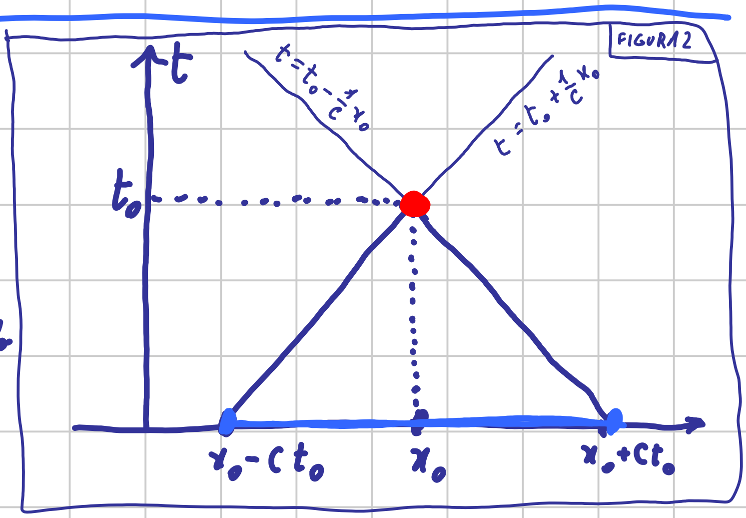
e quindi:

$$w(t,x)=\text{costante su tutto } \Omega.$$

Siccome poi $w(0,x)\equiv 0$, ne deduciamo che $w(t,x)\equiv 0$ su Ω.

Poiché però questo vale per ogni $[a,b] \subset \mathbb{R}$, possiamo concludere che $w(t,x) \equiv 0$ in tutto $[0,+\infty) \times \mathbb{R}$.

OSS 1 Conseguenza immediata di (2) è che il valore di $u(t,x)$ in (t_0, x_0) (punto rosso in figura) dipende solo dai valori assunti dai dati iniziali nell'intervallo $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$ (intervallo azzurro in figura).



OSS 2 Usando in modo opportuno il Teorema 1 è possibile dare un modo alternativo per risolvere il problema della corda di lunghezza L visto nella lezione precedente, cioè cercare $u(t,x) \in C^2([0,+\infty) \times [0,L])$ tale che:

$$
\begin{cases}
u_{tt}(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x) & (4) \\
u(0,x) = f(x) \in C^2([0,L]) \quad \text{con } \overbrace{f(0) = f(L) = 0}^{\text{ed } f''(0) = f''(L) = 0} & (5) \\
u_t(0,x) = g(x) \in C^1([0,L]) \quad \text{con } g(0) = g(L) = 0 & (6) \\
u(t,0) = u(t,L) = 0 & (7)
\end{cases}
$$

Infatti basta prolungare $f(x)$ e $g(x)$ per disparità a $[-L,L]$ e poi prolungarle a tutto $\mathbb{R}$ con periodicità $2L$. La soluzione che si ottiene è:

$$(8) \qquad u(t,x) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\,dy$$

che soddisfa sicuramente (4), (5) e (6). Rimane solo da verificare (7).

Si ha:

$$u(t,0) = \frac{\overbrace{f(ct) + f(-ct)}^{=0 \text{ PERCHÉ } f \text{ È DISPARI}}}{2} + \frac{1}{2c}\overbrace{\int_{-ct}^{ct} g(y)\,dy}^{=0 \text{ PERCHÉ } g \text{ È DISPARI}} = 0$$

inoltre:

$$u(t,L) = \frac{f(L+ct)+\boxed{f(L-ct)}}{2} + \frac{1}{2c}\int_{L-ct}^{L+ct} g(y)\,dy =$$

PERCHÉ f ha Periodo $2L$

$$= \frac{f(L+ct)+\boxed{f(-L-ct)}}{2} + \frac{1}{2c}\int_{-ct}^{+ct} \underbrace{g(y+L)}_{=h(y)\text{ è dispari perché:}}\,dy = 0$$

$$h(y) = g(y+L) = g(-y-L) = g(-y+L) = h(-y)$$

Perché g è dispari — Perché g ha periodo $2L$

Quindi la $u(t,x)$ data da (8) soddisfa anche il dato al bordo (7).

FINE LEZIONE - INIZIO ESERCITAZIONE

ES 1 Sia $u(t,x) \in C^2([0,+\infty)\times\mathbb{R})$ che soddisfi $u_{tt} = c^2 u_{xx}$. Sapendo che $u(0,x) = f(x)$ come bisogna scegliere $u_t(0,x) = g(x)$ se si vuole che $u(t,x)$ sia un'onda sempre della stessa forma che viaggia con velocità c diretta in direzione positiva?

SOLUZIONE La richiesta del problema è di trovare $g(x)$ in modo che la soluzione sia del tipo

(9) $$u(t,x) = f(x-ct)$$

Per una tale $u(t,x)$ si ha ovviamente

$$u_t(t,x) = -c\,f'(x-ct)$$

quindi la funzione candidata come $g(x)$ è $-c\,f'(x)$.

Basta quindi verificare che con dati $u(0,x) = f(x)$ e $u_t(0,x) = -c\,f'(x)$ si ottiene proprio (9). Infatti, usando la formula (2), si ottiene

$$u(t,x) = \frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2\cancel{c}}\int_{x-ct}^{x+ct} -\cancel{c}\,f'(y)\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\cancel{f(x+ct)} + \frac{1}{2}f(x-ct) + \frac{1}{2}\left(-\cancel{f(x+ct)} + f(x-ct)\right) = f(x-ct)$$

ES 2 (vedi enunciato e svolgimento del problema 1 della prova simulata d'esame **SIM 3**)

ES 3 Trovare $u(t,x) \in C^2([0,+\infty)\times[0,+\infty))$ che sia soluzione di

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x) \\ u(0,x) = f(x) \in C^2([0,+\infty)) \\ u_t(0,x) = g(x) \in C^1([0,+\infty)) \\ u(t,0) = 0 \quad \forall t \geq 0 \end{cases}$$

Dove f, g soddisfano le condizioni di compatibilità $f(0)=0$ e $g(0)=0$ ed $f''(0)=0$.

SOLUZIONE Dopo aver prolungato f e g per disparità a tutto $\mathbb{R}$, basta scrivere la soluzione nel solito modo:

$$u(t,x) = \frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\, dy$$

e verificare, come fatto nel **OSS 2** della lezione, che $u(t,0) \equiv 0$.
