# Metodi Matematici - Lez. 19

Titolo nota

3 dicembre 2018 (14.00-15.45) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

## EQUAZIONE DELLE ONDE - CASO NON OMOGENEO - CORDA ILLIMITATA

**PROBLEMA 1** Dati $f(x) \in C^2(\mathbb{R})$, $g(x) \in C^1(\mathbb{R})$ e $F(t,x) \in C^1([0,+\infty) \times \mathbb{R})$ trovare $u(t,x) \in C^2(t,x)$ tale che

$$(1) \quad \begin{cases} u_{tt}(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x) + F(t,x) \\ u(0,x) = f(x) \\ u_t(0,x) = g(x) \end{cases}$$

**OSS 1** Basta prendere $u(t,x) = v(t,x) + w(t,x)$ dove $v(t,x)$ soddisfa:

$$(2) \quad \begin{cases} v_{tt}(t,x) = c^2 v_{xx}(t,x) \\ v(t,x) = f(x) \\ v_t(t,x) = g(x) \end{cases}$$

e $w(t,x)$ soddisfa:

$$(3) \quad \begin{cases} w_{tt}(t,x) = c^2 w_{xx}(t,x) + F(t,x) \\ w(t,x) = 0 \\ w_t(t,x) = 0 \end{cases}$$

Infatti, in tal caso si ottiene:

$$u(0,x) = v(0,x) + w(0,x) = f(x) + 0 = f(x)$$

$$u_t(0,x) = v_t(0,x) + w_t(0,x) = g(x) + 0 = g(x)$$

$$u_{tt}(t,x) = v_{tt}(t,x) + w_{tt}(t,x) = c^2 v_{xx}(t,x) + c^2 w_{xx}(t,x) + F(t,x)$$

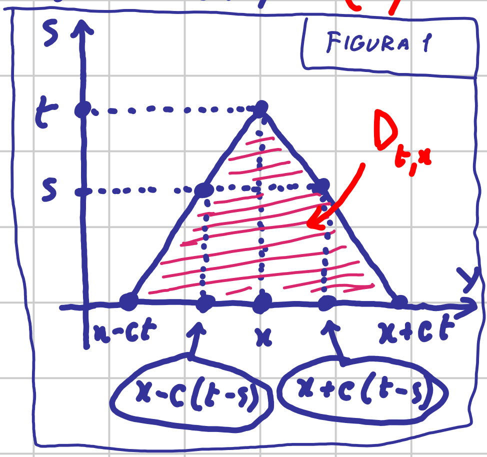
$$= c^2\big(v(t,x)+w(t,x)\big)_{xx} + F(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x) + F(t,x)$$

Sappiamo già che la soluzione $v(t,x)$ di (2) è data da:

$$v(t,x) = \frac{1}{2}\big(f(x+ct)+f(x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\,dy \, .$$

Basterà quindi saper risolvere (3), usando il seguente:

$\boxed{\text{TEO. 1}}$ Se $F(t,x) \in C^1([0,+\infty)\times\mathbb{R})$ allora la soluzione $w(t,x)$ di (3) è data da:




(4) $$w(t,x) = \frac{1}{2c}\int_{D_{t,x}} F(s,y)\,ds\,dy$$

dove $D_{t,x} = \{(s,y)\in[0,+\infty)\times\mathbb{R} \mid s\le t,\ x-c(t-s)\le y\le x+c(t-s)\}$

$\boxed{\text{DIMO}}$ $\boxed{\text{ESISTENZA}}$ Basta sostituire (4) in (3) e verificare che soddisfa.

Per cominciare scriviamo (4) come integrale iterato:

$$w(t,x) = \frac{1}{2c}\int_0^t \left( \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(s,y)\,dy \right) ds$$

Si ha:

$$w_x(t,x) = \frac{1}{2c}\int_0^t F(s,x+c(t-s)) - F(s,x-c(t-s))\,ds$$

$$w_{xx}(t,x) = \frac{1}{2c}\int_0^t F_x(s,x+c(t-s)) - F_x(s,x-c(t-s))\,ds$$

$$w_t(t,x) = \frac{1}{2c}\int_x^x F(s,y)\,dy + \frac{1}{2c}\int_0^t F(s,x+c(t-s))\cdot c - F(s,x-c(t-s))(-c)\,ds =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t F(s, x+c(t-s)) + F(s, x-c(t-s))\, ds$$

$$w_{tt}(t,x) = \frac{1}{2}\Big(F(t,x)+F(t,x)\Big) + \frac{1}{2}\int_0^t F_x(s,x+c(t-s))\cdot c + F_x(s,x-c(t-s))\cdot(-c)\, ds =$$

$$= F(t,x) + c^2 \cdot \frac{1}{2c}\int_0^t F_x(s,x+c(t-s)) - F_x(s,x-c(t-s))\, ds =$$

$$= F(t,x) + c^2\, w_{xx}(t,x).$$

Quindi $w(t,x)$ soddisfa l'equazione. Per i dati iniziali si ha:

$$w(0,x) = \frac{1}{2c}\int_0^0 \left(\int_{x+cs}^{x-cs} F(s,y)\, dy\right) ds = 0$$

$$w_t(0,x) = \frac{1}{2}\int_0^0 F(s,x-cs) - F(s,x+cs)\, ds = 0$$

**UNICITÀ** Basta osservare che se $w_1(t,x)$ e $w_2(t,x)$ soddisfano entrambe (3), la loro differenza soddisfa l'equazione omogenea con dati iniziali nulli e quindi sappiamo già che è identicamente nulla.

**OSS. 2** L'ultima argomentazione sull'unicità si applica senza alcuna variazione anche al problema (1): se $u_1(t,x)$ e $u_2(t,x)$ sono 2 soluzioni di (1), la loro differenza soddisfa l'equazione omogenea con dati iniziali nulli e quindi è identicamente nulla. Possiamo quindi concludere che (1) ha una sola soluzione data da:

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\Big(f(x+ct)+f(x-ct)\Big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\, dy + \frac{1}{2c}\int_{D_{t,x}} F(s,y)\, ds\, dy$$

# EQUAZIONE DELLE ONDE - CASO NON OMOGENEO - CORDA LIMITATA

Procedendo come nel caso della corda illimitata si conclude che basta saper risolvere il problema con dati iniziali nulli.

**PROBLEMA 2** Data $F(t,x) \in C^1([0,+\infty) \times [0,L])$ con $F(t,0) = F(t,L) = 0$ cerchiamo $u(t,x) \in C^2([0,+\infty) \times [0,L])$ che soddisfi:

$$(5) \quad \begin{cases} u_{tt}(t,x) - c^2 u_{xx}(t,x) = F(t,x) \\ u(0,x) = 0 \\ u_t(0,x) = 0 \end{cases}$$

**SOLUZIONE** Prolunghiamo $F(t,x)$ per disparità in $x$ alla striscia $[0,+\infty) \times [-L,L]$, poi lo prolunghiamo per periodicità in $x$ a tutto $[0,+\infty) \times \mathbb{R}$.
Sviluppandola in serie di Fourier per ogni fissato $t$ si ottiene:

$$(6) \qquad F(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} F_n(t) \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right)$$

Cerchiamo ora una soluzione $u(t,x)$ di (5) del tipo

$$(7) \qquad u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right).$$

CIOÈ CERCHIAMO UNA FAMIGLIA NUMERABILE DI FUNZIONI $u_n(t)$ TALI CHE LA SERIE (7) CONVERGA AD UNA SOLUZIONE DI (5)

Si ha:

$$u_t(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(t) \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right)$$

$$u_{tt}(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n''(t) \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right)$$

$$u_x(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) \cdot n \frac{\pi}{L} \cdot \cos\left(n \frac{\pi}{L} x\right)$$

$$u_{xx}(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) \cdot \left(-\frac{n^2 \pi^2}{L^2}\right) \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right)$$

Sostituendo nelle (5) e ricordando (6) si ottiene:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n''(t) \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)\cdot c^2 n^2 \frac{\pi^2}{L^2} \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} F_n(t) \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right) \\ \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(0) \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u_n(0) = 0 \quad \forall n \\ \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(0) \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u_n'(0) = 0 \quad \forall n \end{cases}$$

Quindi $\forall n \in \mathbb{N}-\{0\}$ si ha:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( u_n''(t) + c^2 n^2 \frac{\pi^2}{L^2} u(t) - F_n(t) \right) \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)$$

Ciò significa che se $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}-\{0\}}$ è la famiglia di funzioni che rende (7) soluzione di (5), allora per ogni $n \in \mathbb{N}-\{0\}$ $u_n(t)$ soddisfa il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u_n''(t) + \omega_n^2 u_n(t) = F(t) & (8.1) \\ u_n(0) = 0 & (8.2) \\ u_n'(0) = 0 & (8.3) \end{cases}$$

DOVE ABBIAMO POSTO PER SEMPLICITÀ $\omega_n = \frac{c n \pi}{L}$

Lo risolviamo col metodo della variazione delle costanti.

La soluzione generale dell'omogenea associata alla (8.1) è:

$$v_n(t) = A_n \cdot \cos(\omega_n t) + B_n \cdot \sin(\omega_n t) \qquad \text{con } A_n, B_n \in \mathbb{R}$$

Di conseguenza cerchiamo una soluzione della non omogenea del tipo:

$$(9) \qquad u_n(t) = A_n(t)\cos(\omega_n t) + B_n(t)\sin(\omega_n t).$$

Cerchiamo quindi $A_n(t)$ e $B_n(t)$ in modo che (9) soddisfi

(8.1), (8.2) e (8.3). Ricordiamo inoltre che, essendo ora le incognite 2 invece di una sola, possiamo imporre a nostro arbitrio una condizione aggiuntiva a cui debbano soddisfare. Come è noto, per facilitare i calcoli si sceglie come condizione aggiuntiva:

$$A_n'(t)\cos(\omega_n t) + B_n'(t)\sin(\omega_n t) = 0 \tag{10}$$

Derivando le (9) si ottiene:

$$u_n'(t) = -\omega_n A_n(t)\sin(\omega_n t) + \omega_n B_n(t)\cos(\omega_n t) + \underbrace{A_n'(t)\cos(\omega_n t) + B_n'(t)\sin(\omega_n t)}_{=0 \text{ GRAZIE A } (10)} =$$

$$= -\omega_n A_n(t)\sin(\omega_n t) + \omega_n B_n(t)\cos(\omega_n t)$$

$$u_n''(t) = -\omega_n^2 A_n(t)\cos(\omega_n t) - \omega_n^2 B_n(t)\sin(\omega_n t) - \omega_n A_n'(t)\sin(\omega_n t) + \omega_n B_n'(t)\cos(\omega_n t)$$

Sostituendo in (8.1) e semplificando, si ottiene:

$$-\omega_n \sin(\omega_n t) A_n'(t) + \omega_n \cos(\omega_n t) B_n'(t) = F_n(t)$$

che, combinata con la (10), ci fornisce il sistema:

$$\begin{cases} \cos(\omega_n t) A_n'(t) + \sin(\omega_n t) B_n'(t) = 0 \\ -\omega_n \sin(\omega_n t) A_n'(t) + \omega_n \cos(\omega_n t) B_n'(t) = F_n(t) \end{cases}$$

dal quale, esplicitando rispetto a $A_n'(t)$ e $B_n'(t)$ si ottiene:

$$\begin{cases} A_n'(t) = -\dfrac{1}{\omega_n}\sin(\omega_n t) F_n(t) \\ B_n'(t) = \dfrac{1}{\omega_n}\cos(\omega_n t) F_n(t) \end{cases} \tag{11}$$

Ora, combinando (8.2) e (9) si ottiene $A(0) = 0$, mentre combinando

(8.3) e (9) si ottiene $B(0)=0$.
Di conseguenza, integrando le (11) si ottiene

$$\begin{cases} A_n(t) = -\dfrac{1}{\omega_n}\displaystyle\int_0^t \sin(\omega_n \tau)\, F_n(\tau)\, d\tau \\ B_n(t) = \dfrac{1}{\omega_n}\displaystyle\int_0^t \cos(\omega_n \tau)\, F_n(\tau)\, d\tau \end{cases}$$

Quindi la (9) diventa:

$$u_n(t) = A_n(t)\cos(\omega_n t) + B_n(t)\sin(\omega_n t) =$$

(12)
$$= \frac{1}{\omega_n}\int_0^t \Big(-\sin(\omega_n\tau)\cos(\omega_n t) + \cos(\omega_n\tau)\sin(\omega_n t)\Big) F_n(\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{\omega_n}\int_0^t \sin\big(\omega_n(t-\tau)\big) F_n(\tau)\, d\tau$$

Quindi la soluzione cercata di (5) è:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)$$

dove, per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $u_n(t)$ è dato da (12)