Metodi Matematici - Lez. 20+Exe

Titolo nota

4 dicembre 2018 (9.30-11.15, 11:30-12:15) - docente: Prof. **E. Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

EQUAZIONE DEL CALORE - CASO SBARRA LIMITATA

PROBLEMA 1 Trovare $u(t,x) \in C^2([0,+\infty)\times[0,L])$ che soddisfi:

$$\begin{cases} u_t(t,x) = a^2 u_{xx}(t,x) & (1.1) \\ u(0,x) = f(x) & (1.2) \\ u(t,0) = u(t,L) = 0 & (1.3) \end{cases}$$

dove $f(x) \in C^2([0,L])$ e $f(0) = f(L) = 0$.

SOLUZIONE Per cominciare cerchiamo una famiglia numerabile di soluzioni non identicamente nulle di (1.1) del tipo:

$$u(t,x) = X(x)\cdot T(t) \tag{2}$$

Procedendo come nell'equazione delle onde, il fatto che (2) sia soluzione di (1.1), equivale a dire che esiste $n \in \mathbb{N}-\{0\}$ tale che:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = a^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = -n^2\frac{\pi^2}{L^2}a^2$$

mentre dal fatto che soddisfa (1.3) equivale a $X(0) = X(L) = 0$.

Ora, per ogni $n \in \mathbb{N}-\{0\}$, prendiamo $X_n(x) = \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)$ come soluzione non identicamente nulla di:

$$\begin{cases} \dfrac{X''(x)}{X(x)} = -\dfrac{n^2\pi^2}{L^2} \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

e $T_n(t) = e^{-\frac{a^2\pi^2n^2}{L^2}t}$ come soluzione non identicamente nulla di:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = -\frac{a^2\pi^2n^2}{L^2}$$

Otteniamo la seguente famiglia numerabile di soluzioni di (1.1) nulle al bordo:

$$u_n(t,x) = X_n(t)T_n(t) = \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{L^2}t}$$

Si tratta ora di trovare $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in modo che

(3) $$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_n u_n(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_n \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{L^2}t}$$

soddisfi anche il dato iniziale (1.2), cioè si abbia:

$$f(x) = u(0,x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)$$

Chiaramente, perchè ciò valga basta prolungare $f(x)$ per disparità a $[-L,L]$ e poi prendere come α_n i coefficienti della sua serie di Fourier, cioè:

(4) $$\alpha_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dx$$

Quindi la soluzione cercata è (3) con i coefficienti α_n definiti da (4).

TRASFORMATA DI FOURIER

DEF 1 Data $f\in L^1(\mathbb{R})$ definiamo $\hat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, $\lambda\mapsto\hat{f}(\lambda)$ dove $\forall\lambda\in\mathbb{R}$ definiamo

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx.$$

OSS 1 $\forall\lambda\in\mathbb{R}$ il valore $\hat{f}(\lambda)$ è ben definito perchè se $f\in L^1(\mathbb{R})$ anche $f(x)e^{-i\lambda x}\in L^1(\mathbb{R})$ e quindi $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx$ esiste finito.

Inoltre $\hat{f}$ è limitata perchè $\forall\lambda\in\mathbb{R}$

$$|\hat{f}(\lambda)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \cdot |e^{-i\lambda x}| dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = \| f \|_{L^1(\mathbb{R})}$$

Quindi, passando al sup per $\lambda \in \mathbb{R}$, si ottiene:

$$\| \hat{f} \|_\infty \leq \| f \|_{L^1(\mathbb{R})}$$

Quindi, se indichiamo con $\mathcal{F}$ l'applicazione $f \mapsto \hat{f}$ abbiamo che $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}) \to B(\mathbb{R})$ dove $B(\mathbb{R}) = \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \text{ è limitata} \}$.
Si osservi che prendendo $\|\cdot\|_1$ su $L^1(\mathbb{R})$ e $\| \ \|_\infty$ su $B(\mathbb{R})$ $\mathcal{F}$ risulta un'applicazione limitata visto che $\| \hat{f} \|_\infty \leq \| f \|_1$.

OSS 2 $\mathcal{F}$ è lineare. Infatti, $\forall f, g \in L^1(\mathbb{R})$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, si ha:

$$\widehat{(\alpha f + \beta g)}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x)) e^{-i\lambda x} dx =$$

$$= \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-i\lambda x} dx =$$

$$= \alpha \hat{f}(\lambda) + \beta \hat{g}(\lambda)$$

TEO 1 Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ allora $\hat{f}$ è continua e infinitesima per $\lambda \to \pm\infty$.

DIMO **I Passo** Il teorema vale se $f(x)$ è del tipo $\chi_{[a,b]}(x)$. In tal caso infatti si ha:

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[a,b]}(x) e^{-i\lambda x} dx = \int_a^b e^{-i\lambda x} dx =$$

$$= \begin{cases} \lambda = 0: & = b - a \\ \lambda \neq 0: & = \left[\dfrac{e^{-i\lambda x}}{-i\lambda} \right]_{x=a}^{x=b} = \dfrac{e^{-i\lambda b} - e^{-i\lambda a}}{-i\lambda} \end{cases}$$

Quindi $\hat{f}(\lambda)$ è infinitesima per $\lambda \to \pm\infty$ perché

$$\left|\hat{f}(\lambda)\right| = \frac{\left|e^{-i\lambda b} - e^{-i\lambda a}\right|}{|-i\lambda|} \leq \frac{2}{|\lambda|} \to 0 \quad \text{per } \lambda \to \pm\infty.$$

Inoltre $\hat{f}(\lambda)$ è banalmente continua per ogni $\lambda \neq 0$. Per verificare che è continua anche per $\lambda = 0$ osserviamo che:

$$\lim_{\lambda \to 0} \hat{f}(\lambda) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{e^{-i\lambda b} - e^{-i\lambda a}}{-i\lambda} =$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \underbrace{e^{-i\lambda a}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{e^{-i\lambda(b-a)} - 1}{i\lambda(b-a)}}_{\to 1} \cdot (b-a) =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot (b-a) = b - a = \hat{f}(0)$$

$\boxed{\text{II Passo}}$ Il teorema vale se $f(x)$ è nulla fuori da un compatto ed è costante a tratti. Infatti in tal caso $f(x)$ è del tipo:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{[a_i, b_i]}(x)$$

quindi, usando la linearità di $\mathcal{F}$, si ha

$$\hat{f}(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \hat{f}_i(\lambda)$$

dove, per ogni $i = 1, \dots, n$, $\hat{f}_i(\lambda)$ è continua e infinitesima per il $\boxed{\text{I Passo}}$ perché trasformata di Fourier di $\chi_{[a_i, b_i]}(x)$.

Quindi $\hat{f}$ è continua e infinitesima perché è combinazione lineare di funzioni continue e infinitesime.

$\boxed{\text{III° Passo}}$ Ricordiamo che $C_0(\mathbb{R})$ è denso in $L^1(\mathbb{R})$ e che, utilizzando il T. di Heine-Cantor, ogni funzione in $C_0(\mathbb{R})$ può essere approssimata bene quanto serve con una funzione costante a tratti e nulla fuori da un compatto.

Possiamo quindi affermare che, presa $f \in L^1(\mathbb{R})$,

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists g$ costante a tratti e nulla fuori da un compatto t.c. $\|f - g\|_1 < \varepsilon$.

Visto che ciò vale $\forall \varepsilon > 0$, possiamo dire che $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$ esiste g_n costante a tratti e nulla fuori da un compatto tale che $\| f - g_n \|_1 < \frac{1}{n}$.

Possiamo cioè costruire una successione $(g_n)_{n \in \mathbb{N}-\{0\}}$ di funzioni costanti a tratti e nulle fuori da un compatto t.c. $\| f - g_n \|_1 \to 0$.

Ma allora, per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $\hat{g}_n$ è continua e infinitesima e $\hat{g}_n \to \hat{f}$ uniformemente, perché:

$$\| \hat{f} - \hat{g}_n \|_\infty = \| \widehat{f - g_n} \|_\infty \leq \| f - g_n \|_1 < \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{per } n \to +\infty$$

Quindi $\hat{f}$ è continua e infinitesima perché limite uniforme di funzioni continue e infinitesime.

$\boxed{\text{OSS 3}}$ Sia $C_B(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid \text{continue e limitate} \}$ dotato di $\| \cdot \|_\infty$.

Allora
$$\begin{aligned} \mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) &\to C_B(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto \hat{f} \end{aligned}$$
è un'applicazione lineare e continua.

La linearità è già stata dimostrata, per la continuità basta mostrare che se $f_n \to 0$ in $L^1(\mathbb{R})$ allora $\hat{f}_n \to 0$ in $C_B(\mathbb{R})$.

Ma questo è ovvio perché sappiamo già che

$$\| \hat{f}_n \|_\infty \leq \| f_n \|_1 .$$

$\boxed{\text{TEO 2}}$ Data $f \in L^1(\mathbb{R})$, valgono le seguenti proprietà:

1) f pari $\Rightarrow$ $\hat{f}$ pari
2) f dispari $\Rightarrow$ $\hat{f}$ dispari
3) f reale $\Rightarrow$ $\hat{f}(-\lambda) = \overline{\hat{f}(\lambda)}$
4) f reale e pari $\Rightarrow$ $\hat{f}$ reale e pari
5) f reale e dispari $\Rightarrow$ $\hat{f}$ immaginaria e dispari.

$\boxed{\text{DIMO}}$ $\boxed{1}$ Se f è pari si ha:

$$\hat{f}(-\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{i\lambda x}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\lambda(-x)}\, dx \overset{\substack{\text{PERCHÉ} \\ f \text{ È PARI}}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(-x)\, e^{-i\lambda(-x)}\, dx \overset{\substack{\text{CAMBIO DI} \\ \text{VARIABILE}}}{=}$$

$$= \int_{+\infty}^{-\infty} f(y)\, e^{-i\lambda y} \cdot (-1)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{-i\lambda y}\, dy = \hat{f}(\lambda)$$

$\boxed{2}$ Se f è dispari si ha:

$$\hat{f}(-\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{i\lambda x}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\lambda(-x)}\, dx \overset{\boxed{\text{PERCHÉ } f \text{ È DISPARI}}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} -f(-x)\, e^{-i\lambda(-x)}\, dx \overset{\boxed{\text{CAMBIO DI VARIABILE}}}{=}$$

$$= \int_{+\infty}^{-\infty} f(y)\, e^{-i\lambda y}\, dy = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{-i\lambda y}\, dy = -\hat{f}(\lambda).$$

$\boxed{3}$ Se f è reale si ha:

$$\hat{f}(-\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{i\lambda x}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \overline{e^{-i\lambda x}}\, dx \overset{\boxed{\text{PERCHÉ } f \text{ È REALE}}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)} \cdot \overline{e^{-i\lambda x}}\, dx =$$

$$= \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{-i\lambda x}\, dx} = \overline{\hat{f}(\lambda)}$$

$\boxed{4}$ Se f è reale e pari si ha:

$$\hat{f}(\lambda) \overset{\boxed{\text{PER}(1)}}{=} \hat{f}(-\lambda) \overset{\boxed{\text{PER}(3)}}{=} \overline{\hat{f}(\lambda)}$$

Quindi $\hat{f}(\lambda) = \overline{\hat{f}(\lambda)}$, cioè $\hat{f}(\lambda)$ è reale.

Quindi $\hat{f}$ è reale e pari.

$\boxed{5}$ Se f è reale e dispari si ha:

$$\hat{f}(\lambda) \overset{\boxed{\text{PER}(2)}}{=} -\hat{f}(-\lambda) \overset{\boxed{\text{PER}(3)}}{=} -\overline{\hat{f}(\lambda)}$$

Quindi $\hat{f}(\lambda) = -\overline{\hat{f}(\lambda)}$, cioè $\hat{f}(\lambda)$ è immaginario.

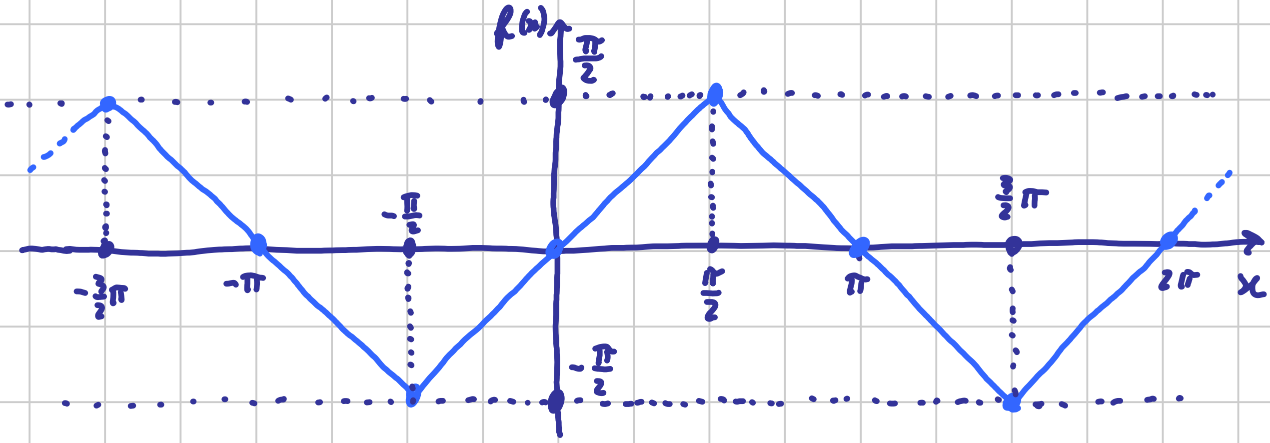
Quindi $\hat{f}$ è immaginaria e dispari.

FINE LEZIONE - INIZIO ESERCITAZIONE

ESERCIZIO 6 (LISTA 3) Risolvere

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) = c\, u_{xx}(t,x) \\ u(0,x) = f(x) \\ u_t(0,x) = 0 \end{cases}$$

dove $f(x)$ è la funzione il cui grafico è:



$\boxed{\text{OSS 1}}$ Anche se $f(x)$ non è di classe C^2 e quindi la $u(t,x)$ che si ottiene da lei non può essere considerata soluzione dell'equazione delle onde in senso classico, tuttavia gli si può attribuire ugualmente l'appellativo di soluzione grazie alla seguente:

$\boxed{\text{PROPRIETÀ}}$ Se $u(t,x)$ e $v(t,x)$ sono date da:

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\Big(f_1(x+ct)+f_1(x-ct)\Big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g_1(y)\,dy$$

$$v(t,x) = \frac{1}{2}\Big(f_2(x+ct)+f_2(x-ct)\Big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g_2(y)\,dy$$

Allora:

$$|u(t,x)-v(t,x)| \leq \frac{1}{2}\Big(|f_1(x+ct)-f_2(x+ct)|+|f_1(x-ct)-f_2(x-ct)|\Big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} |g_1(y)-g_2(y)|\,dy \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\Big(\|f_1-f_2\|_\infty + \|f_1-f_2\|_\infty\Big) + \frac{1}{2c}\cdot 2ct\,\|g_1-g_2\|_\infty =$$

$$= \|f_1-f_2\|_\infty + t\cdot\|g_1-g_2\|_\infty$$

e quindi

$$\|u-v\|_{L^\infty([0,T]\times\mathbb{R})} \leq \|f_1-f_2\|_\infty + T\cdot\|g_1-g_2\|_\infty$$

Detto più semplicemente: se i dati iniziali di 2 soluzioni sono "vicini", le due soluzioni "rimangono vicine".
Ciò vuol dire che, anche se $f(x)$ non è di classe C^2 e quindi la soluzione che ottengo non è una "vera" soluzione, tuttavia rimane vicina a soluzioni "vere" che partono da dati C^2 vicini ad $f(x)$. Quindi trovandola ho informazioni "approssimate" anche sulle soluzioni vere.

$\boxed{\text{SOLUZIONE ESERCIZIO 6}}$ L'espressione analitica della soluzione è molto semplice:

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right)$$

dove $f(x)$ è la funzione il cui grafico è in figura. Vediamo di ricavare alcune proprietà di $u(t,x)$

1) È periodica in x di periodo 2π (ovvio perché f lo è)
2) È periodica in t di periodo $\frac{2\pi}{c}$ perché:

$$u\left(t+\frac{2\pi}{c}, x\right) = \frac{1}{2}\left(f\left(x+c\cdot\left(\frac{2\pi}{c}+t\right)\right) + f\left(x-c\cdot\left(\frac{2\pi}{c}+t\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(f(x+2\pi+ct) + f(x-2\pi-ct)\right) =$$

GRAZIE ALLA PERIODICITÀ DI $f(x)$

$$= \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) = u(t,x)$$

3) $u\left(t+\frac{\pi}{c},x\right) = -u(t,x)$ perché:

$$u\left(t+\frac{\pi}{c},x\right) = \frac{1}{2}\left(f\left(x+c\left(t+\frac{\pi}{c}\right)\right) + f\left(x-c\left(t+\frac{\pi}{c}\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(f(x+ct+\pi) + f(x-ct-\pi)\right) =$$

PERCHÈ $f(x+\pi) = -f(x)$

$$= -\frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) = -u(t,x)$$

4) $u(t,x+\pi) = -u(t,x)$ perché:

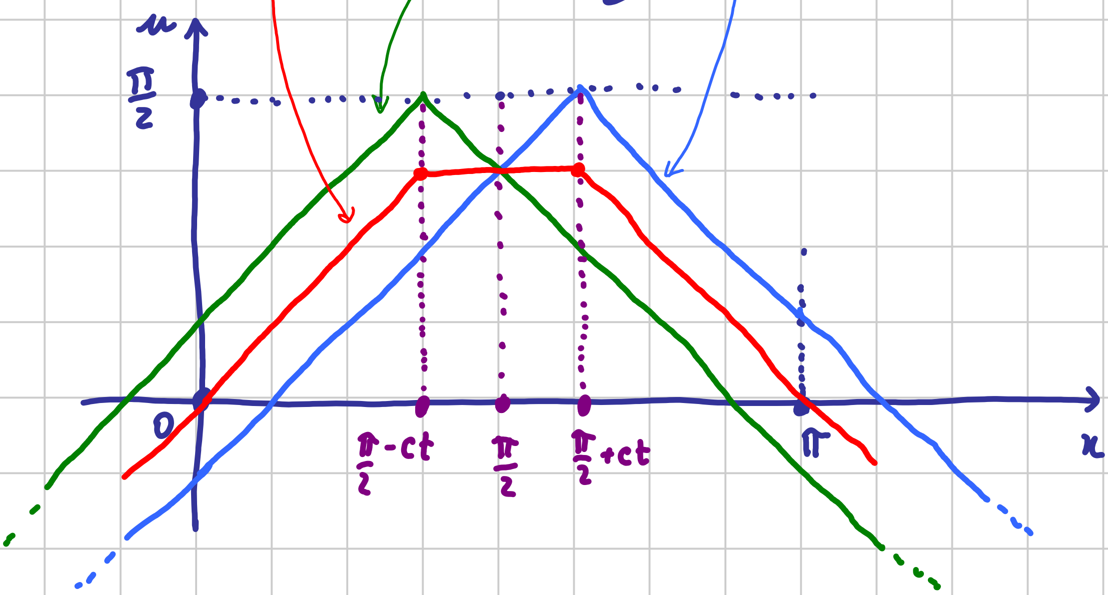
PERCHÉ $f(x+\pi) = -f(x)$

$$u(t,x+\pi) = \frac{1}{2}\Big(f(x+\pi+ct) + f(x+\pi-ct)\Big) = -\frac{1}{2}\Big(f(x+ct) + f(x-ct)\Big) = -u(t,x)$$

Grazie a 1), 2), 3) e 4) è sufficiente descrivere $u(t,x)$ per $(t,x) \in [0, \frac{\pi}{c}] \times [0,\pi]$ per determinarla su tutto $[0,+\infty) \times \mathbb{R}$

Ma la descrizione del grafico di $u(t,x)$ in $[0,\frac{\pi}{c}]\times[0,\pi]$ è semplice perché:

$$u(t,x) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2}$$



PROBLEMA 11 LISTA 3 Trovare $u(t,x) \in C^2([0,+\infty)\times\mathbb{R})$ tale che

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) = u_{xx}(t,x) + e^{-t}\sin x \\ u(0,x) = \sin(5x) \\ u_t(0,x) = 0 \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \end{cases}$$

SOLUZIONE Si risolve separatamente:

① $\begin{cases} v_{tt} = v_{xx} \\ v(0,x) = \sin(5x) \\ v_t(0,x) = 0 \\ v(t,0) = u(t,\pi) = 0 \end{cases}$ ② $\begin{cases} w_{tt} = w_{xx} + e^{-t}\sin x \\ w(0,x) = 0 \\ w_t(0,x) = 0 \\ w(t,0) = w(t,\pi) = 0 \end{cases}$

La soluzione di 1 è $v(t,x) = \sin(5x)\cos(5t)$ perché [...]

Risolvo 2. Sviluppando $F(t,x)$ in serie di Fourier per ogni t fissato scopro che la serie ha solo il 3° termine. Quindi quando cerco la soluzione $w(t,x)$ nella forma:

$$w(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n(t) \sin(nx)$$

c'è solo il 3° termine $w_3(t)$ che sappiamo essere dato dalla formula:

$$w_3(t) = \frac{1}{3} \int_0^t \sin(3(t-\tau))\, e^{-\tau}\, d\tau$$

Quindi la soluzione $w(t,x)$ è data da

$$w(t,x) = \frac{\sin 3x}{3} \int_0^t \sin(3t-3\tau)\, e^{-\tau}\, d\tau$$

e la soluzione $u(t,x)$ del problema iniziale è:

$$u(t,x) = v(t,x) + w(t,x) = \sin(5x)\cos(5t) + \frac{1}{3}\sin 3x \cdot \int_0^t \sin(3t-3\tau)\, e^{-\tau}\, d\tau$$

(Se si vuole si può anche fare/risolvere l'integrale perché la primitiva si riesce a trovare esplicitamente)