Metodi Matematici - Lez. 21

Titolo nota

10 dicembre 2018 (14.00-15.45) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma *Tor Vergata*

TRASFORMATA DI FOURIER (... CONTINUA .....)

ES. 1 Se $f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$ allora $\hat{f}(\lambda) = \begin{cases} b-a & \text{se } \lambda = 0 \\ \dfrac{e^{-i\lambda b} - e^{-i\lambda a}}{-i\lambda} & \text{se } \lambda \neq 0 \end{cases}$

(già fatto il calcolo nella LEZ. 20 nella DIMO DEL TEO 1, dove si è anche verificato che $\hat{f}$ è continua)

In particolare se $f(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$, per $\lambda \neq 0$ si ha:

$$\hat{f}(\lambda) = -\frac{1}{i\lambda}\left(e^{-i\lambda a} - e^{i\lambda a}\right) = -\frac{1}{i\lambda}\left(\cancel{\cos(\lambda a)} - i\sin(\lambda a) - \cancel{\cos(\lambda a)} - i\sin(\lambda a)\right) =$$

$$= -\frac{1}{i\lambda}\cdot\left(-2i\sin(\lambda a)\right) = \frac{2\sin(a\lambda)}{\lambda}$$

Quindi:

$$\hat{f}(\lambda) = \begin{cases} 2a & \text{se } \lambda = 0 \\ \dfrac{2\sin(a\lambda)}{\lambda} & \text{se } \lambda \neq 0 \end{cases}$$

ES. 2 Se $f(x) = e^{-|x|}$ allora $\hat{f}(\lambda) = \dfrac{2}{1+\lambda^2}$. Infatti:

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} e^{-i\lambda x}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\cos(\lambda x) - \underbrace{i\, e^{-|x|}\sin(\lambda x)}_{\text{È DISPARI} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} = 0}\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\cos(\lambda x)\, dx \overset{\text{PERCHÉ INTEGRANDA È PARI}}{=} 2\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(\lambda x)\, dx = \frac{2}{1+\lambda^2}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(\lambda x)\, dx = \int_0^{+\infty} (-e^{-x})'\cos(\lambda x)\, dx = \left[-e^{-x}\cos(\lambda x)\right]_0^{+\infty} - \lambda\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin(\lambda x)\, dx =$$

$$= 1 - \lambda\int_0^{+\infty}(-e^{-x})'\sin(\lambda x)\, dx = 1 - \lambda\left(\left[-e^{-x}\sin\lambda x\right]_0^{+\infty} + \lambda\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(\lambda x)\, dx\right) = 1 - \lambda^2\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(\lambda x)\, dx$$

quindi:
$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(\lambda x)\,dx = 1-\lambda^2\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(\lambda x)\,dx$$
da cui segue:
$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(\lambda x)\,dx = \frac{1}{1+\lambda^2}$$

TEO 1 Se $f\in L^1(\mathbb{R})$ e $c\neq 0$ allora $\widehat{f(cx)}(\lambda)=\frac{1}{|c|}\hat{f}\left(\frac{\lambda}{c}\right)$.

DIMO Se $c>0$ si ha:
$$\widehat{f(cx)}(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(cx)\,e^{-i\lambda x}\,dx=\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{+\infty} f(cx)\,e^{-i\frac{\lambda}{c}cx}\cdot c\,dx \overset{\boxed{y=cx}}{=}$$
$$=\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,e^{-i\frac{\lambda}{c}y}\,dy=\frac{1}{c}\hat{f}\left(\frac{\lambda}{c}\right)$$

Se invece $c<0$ si ha:
$$\widehat{f(cx)}(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(cx)\,e^{-i\lambda x}\,dx=\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{+\infty} f(cx)\,e^{-i\frac{\lambda}{c}cx}\cdot c\,dx \overset{\boxed{y=cx}}{=}$$
$$=\frac{1}{c}\int_{+\infty}^{-\infty} f(y)\,e^{-i\frac{\lambda}{c}y}\,dy=-\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,e^{-i\frac{\lambda}{c}y}\,dy=\frac{1}{-c}\hat{f}\left(\frac{\lambda}{c}\right)$$

In ogni caso quindi si ha:
$$\widehat{f(cx)}(\lambda)=\frac{1}{|c|}\hat{f}\left(\frac{\lambda}{c}\right)$$

ES. 3 Se $f(x)=e^{-a|x|}$, con $a>0$, allora $\hat{f}(\lambda)=\frac{2a}{a^2+\lambda^2}$.

Infatti, detta $g(x)=e^{-|x|}$, si ha $f(x)=e^{-a|x|}=e^{-|ax|}=g(ax)$, quindi:
$$\hat{f}(\lambda)=\widehat{g(ax)}(\lambda)=\frac{1}{a}\cdot\hat{g}\left(\frac{\lambda}{a}\right)=\frac{1}{a}\cdot\frac{2}{1+\left(\frac{\lambda}{a}\right)^2}=\frac{2a}{a^2+\lambda^2}$$

TEO. 2 Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ allora $\widehat{f(x-x_0)}(\lambda) = e^{-i\lambda x_0}\hat{f}(\lambda)$.

DIMO

$y = x - x_0$

$$\widehat{f(x-x_0)}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-x_0)e^{-i\lambda x}\,dx = e^{-i\lambda x_0}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-x_0)\,e^{-i\lambda(x-x_0)}\,dx =$$

$$= e^{-i\lambda x_0}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-i\lambda y}\,dy = e^{-i\lambda x_0}\hat{f}(\lambda)$$

TEO 3 Data $f \in L^1(\mathbb{R})$ supponiamo che f sia anche continua in tutto $\mathbb{R}$ e che sia C^1 a tratti. Supponiamo inoltre che $f' \in L^1(\mathbb{R})$.

Allora $\widehat{f'}(\lambda) = i\lambda\hat{f}(\lambda)$.

DIMO Per cominciare osserviamo che, grazie alle ipotesi di regolarità per f, in ogni intervallo $[a,b]$ si ha:

(1) $$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx.$$

Ciò segue immediatamente dal T. fondamentale del calcolo integrale se f è C^1 in tutto $[a,b]$, se invece ci sono $x_1, x_2, \dots, x_k \in (a,b)$ nei quali f è continua ma non derivabile si ha:

$$\int_a^b f'(x)\,dx = \int_a^{x_1} f'(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f'(x)\,dx + \dots + \int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(x)\,dx + \int_{x_k}^b f'(x)\,dx =$$

APPLICANDO IL TEO. FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE A CIASCUN INTEGRALE

$$= -f(a) + \cancel{f(x_1)} - \cancel{f(x_1)} + \cancel{f(x_2)} - \cancel{\dots\dots} - \cancel{f(x_{k-1})} + \cancel{f(x_k)} - \cancel{f(x_k)} + f(b) =$$

$$= f(b) - f(a)$$

Applicando (1) all'intervallo $[0,x]$ otteniamo:

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt$$

dalla quale, ricordando che $f' \in L^1(\mathbb{R})$, segue che:

(2) $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(0) + \int_0^{+\infty} f'(t)\,dt = \text{esiste finito.}$$

In modo del tutto analogo si ottiene che

(3) $$\lim_{x\to-\infty} f(x) \quad \text{esiste finito}$$

A questo punto, combinando (2) e (3) col fatto che $f \in L^1(\mathbb{R})$, si ottiene che:

(4) $$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

cosa che ci è necessaria per giustificare alcuni passaggi nei calcoli di $\hat{f'}$.
A questo punto si ha:

$$\widehat{f'}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx =$$

VALE 0 PERCHÈ $f(x)\to 0$ PER $x\to\pm\infty$

$$= \boxed{\Big[f(x)\, e^{-i\lambda x}\Big]_{-\infty}^{+\infty}} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\left(e^{-i\lambda x}\right)' dx =$$

$$= i\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx = i\lambda \cdot \hat{f}(\lambda)$$

TEO 3.bis Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ t.c. $f', f'', \ldots, f^{(n-1)}$ esistono su tutto $\mathbb{R}$ e sono in $L^1(\mathbb{R})$. Supponiamo inoltre che $f^{(n-1)}$ sia C^1 a tratti e che $f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$.
Allora:
$$\widehat{f^{(n)}}(\lambda) = (i\lambda)^n \hat{f}(\lambda)$$

DIMO Applicando ripetutamente il TEO 3 si ottiene:
$$\widehat{f^{(n)}}(\lambda) = (i\lambda)\, \widehat{f^{(n-1)}}(\lambda) = (i\lambda)^2\, \widehat{f^{(n-2)}}(\lambda) = \ldots = (i\lambda)^n \hat{f}(\lambda)$$

TEO 4 Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ tale che anche $x f(x) \in L^1(\mathbb{R})$. Allora $\hat{f}(\lambda)$ è derivabile e si ha:

$$\left(\hat{f}(\lambda)\right)' = \widehat{\left(-ix f(x)\right)}(\lambda)$$

DIMO Dobbiamo dimostrare che esiste finito il limite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\hat{f}(\lambda+h) - \hat{f}(\lambda)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i(\lambda+h)x}\,dx - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x}\,dx\right) =$$

$$= \lim_{h \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} \cdot \frac{e^{-ihx}-1}{h}\,dx$$

(5) $$= \lim_{h \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} -ix f(x) e^{-i\lambda x} \cdot \frac{e^{-ihx}-1}{-ihx}\,dx$$

Si noti che, poiché $\frac{e^{-ihx}-1}{ihx} \to 1$ per $h \to 0$, esiste tutto un intervallo $(-\delta, \delta)$ tale che, se $h \in (-\delta, \delta)$ allora:

$$\left|\frac{e^{-ihx}-1}{ihx}\right| < 2$$

Di conseguenza, se indichiamo con $g_h(x)$ la funzione integranda:

$$g_h(x) = -ix f(x) e^{-i\lambda x} \frac{e^{-ihx}-1}{ihx},$$

$\forall h \in (-\delta, \delta)$ e $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha:

$$|g_h(x)| = |-ix f(x)| \cdot |e^{-i\lambda x}| \cdot \left|\frac{e^{-ihx}-1}{ihx}\right| \leq 2|x f(x)|$$

Ovvero $\forall h \in (-\delta, \delta)$ la funzione $|g_h(x)|$ è dominata da $2|x f(x)|$, che è sommabile. Ciò significa che possiamo applicare il Teorema della convergenza dominata nella (5) e passare al limite sotto il segno di integrale, ottenendo:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\hat{f}(\lambda+h)-\hat{f}(\lambda)}{h} = \lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} -ix f(x) e^{-i\lambda x} \frac{e^{-ihx}-1}{-ihx} \, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} -ix f(x) e^{-i\lambda x} \cdot 1 \, dx = \widehat{(-ix) f(x)}(\lambda)$$

TEO. 4.bis Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ tale che anche $x f(x), x^2 f(x), \dots, x^n f(x) \in L^1(\mathbb{R})$. Allora $\hat{f}(\lambda)$ è derivabile n volte e si ha:

$$\left(\hat{f}(\lambda)\right)^{(n)} = \widehat{\left((-ix)^n f(x)\right)}(\lambda)$$

DIMO Applicando ripetutamente il TEO 4 si ha:

$$\widehat{(-ix)^n f(x)}(\lambda) = \widehat{(-ix)\cdot\left((-ix)^{n-1} f(x)\right)}(\lambda) = \left(\widehat{(-ix)^{n-1} f(x)}(\lambda)\right)' =$$

$$= \dots = \left(\widehat{(-ix) f(x)}(\lambda)\right)^{(n-1)} = \left(\hat{f}(\lambda)'\right)^{(n-1)} = \left(\hat{f}(\lambda)\right)^{(n-1)}$$

OSS 1 I teoremi 3.bis e 4.bis hanno un importante effetto collaterale.
Il teorema 3.bis ci garantisce che se $f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$ allora:

$$\hat{f}(\lambda) = o\left(\frac{1}{\lambda^n}\right) \quad \text{per } \lambda \to \pm\infty$$

perché $(i\lambda)^n \hat{f}(\lambda) = \widehat{f^{(n)}}(\lambda)$ che è infinitesimo per $\lambda \to \pm\infty$.
Semplificando: più aumenta la regolarità di $f(x)$ più aumenta l'ordine di infinitesimo di $\hat{f}(\lambda)$ per $\lambda \to +\infty$.
Il teorema 4.bis invece scambia le due proprietà: se $f(x)$ si annulla di ordine alto per $x \to \pm\infty$ allora $x^n f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ per valori di n molto alti e quindi $\hat{f}(\lambda)$ sarà derivabile n volte, con n grande.
Stavolta quindi aumentando l'ordine di infinitesimo di $f(x)$ per $x \to \pm\infty$,

aumenta la regolarità di $\hat{f}(\lambda)$.

DEF. 1 Diremo che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è una funzione rapidamente decrescente se $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e inoltre $\forall k \in \mathbb{N}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $x^n f^{(k)}(x)$ è una funzione limitata. Lo spazio delle funzioni rapidamente decrescenti verrà indicato con $S(\mathbb{R})$.

ES. 4 Sia $f(x) = e^{-x^2}$; allora $f \in S(\mathbb{R})$.
Infatti basta osservare che per ogni $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(x)$ è della forma:

$$f^{(k)}(x) = P_k(x) \cdot e^{-x^2} \quad \text{con } P_k(x) \text{ polinomio}$$

Quindi $\forall k \in \mathbb{N}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$x^n f^{(k)}(x) = x^n \cdot P_k(x) \cdot e^{-x^2} \longrightarrow 0 \quad \text{per } x \to \pm\infty.$$

Quindi $x^n f^{(k)}(x)$ è limitata per ogni n e per ogni k.

TEO 5 Se $f(x) \in S(\mathbb{R})$ allora $\hat{f}(\lambda) \in S(\mathbb{R})$.

DIMO Vogliamo mostrare che per ogni $k \in \mathbb{N}$ $\left(\hat{f}(\lambda)\right)^{(k)}$ esiste ed è $o\left(\frac{1}{\lambda^n}\right)$ per $\lambda \to \pm\infty$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Per cominciare osserviamo che, essendo $f \in S(\mathbb{R})$, per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha

$$f(x) = o\left(\frac{1}{x^{k+2}}\right) \quad \text{per } x \to \pm\infty$$

e quindi

$$x^k f(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{per } x \to \pm\infty$$

da cui segue che $x^k f(x) \in L^1(\mathbb{R})$. Poichè questo vale per ogni $k \in \mathbb{N}$ ed inoltre $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, il $\boxed{\text{TEO 4.bis}}$ ci garantisce che $\left(\hat{f}(\lambda)\right)^{(k)}$ esiste per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Rimane da dimostrare che, per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\lambda^n \left(\hat{f}(\lambda)\right)^{(k)}$ è sempre infinitesima per $\lambda \to \pm\infty$.

Ma questo è vero perchè:

$$(i\lambda)^n \left(\hat{f}(\lambda)\right)^{(k)} \overset{\text{PER TEO 4.bis}}{=} (i\lambda)^n \widehat{(-ix)^k f(x)}(\lambda) \overset{\text{PER TEO 3.bis}}{=} \widehat{\left((-ix)^k f(x)\right)^{(n)}}(\lambda) \xrightarrow{\text{PERCHÈ } (-ix)^k f^{(n)}(x) \in L^1(\mathbb{R}) \text{ IN QUANTO } f \in S(\mathbb{R})} 0 \text{ per } \lambda \to \pm\infty$$

$\boxed{\text{ES. 5}}$ Se $f(x) = e^{-x^2}$ allora $\hat{f}(\lambda) = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\lambda^2}{4}}$.

Osserviamo che:

$$f'(x) = -2x\, e^{-x^2} = -2x\, f(x)$$

Operando con la trasformata di Fourier in ambo i membri si ottiene:

$$\widehat{f'(x)}(\lambda) = \widehat{-2x f(x)}(\lambda)$$

cioè:

$$(i\lambda)\hat{f}(\lambda) = -2i\, \widehat{(-ix) f(x)}(\lambda)$$

cioè:

$$(i\lambda)\hat{f}(\lambda) = -2i \left(\hat{f}(\lambda)\right)'.$$

Quindi, se $f(x) = e^{-x^2}$, allora $\hat{f}(\lambda)$ deve soddisfare l'equazione differenziale:

$$\left(\hat{f}(\lambda)\right)' = -\frac{\lambda}{2}\hat{f}(\lambda)$$

che è del I° ordine, a variabili separabili.

Per decidere il dato iniziale $\hat{f}(0)$ si ricordi che:

$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i0x}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx \overset{\text{RISULTATO NOTO DAL CORSO DI ANALISI II}}{=} \sqrt{\pi}$$

Quindi $\hat{f}(\lambda)$ è la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \hat{f}' = -\frac{\lambda}{2}\hat{f} \\ \hat{f}(0) = \sqrt{\pi} \end{cases}$$

Separando le variabili si ottiene:

$$\frac{\hat{f}'}{\hat{f}} = \frac{\lambda}{2}$$

cioè:

$$\ln\left|\hat{f}(\lambda)\right| = -\frac{\lambda^2}{4} + c$$

cioè $$\hat{f} = k\, e^{-\frac{\lambda^2}{4}}$$

che, combinato col fatto che $\hat{f}(0)=\sqrt{\pi}$, implica:

$$\hat{f}(\lambda) = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\lambda^2}{4}}$$

OSS. 2 Trovata la trasformata di Fourier di $f(x) = e^{-x^2}$, si può ovviamente trovare anche quella di $g(x) = e^{-a x^2}$, con $a>0$.
Infatti si ha:

$$g(x) = e^{-a x^2} = e^{-(\sqrt{a}\, x)^2} = f(\sqrt{a}\, x)$$

e quindi:

$$\hat{g}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \hat{f}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{a}}\right) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\left(\frac{\lambda}{\sqrt{a}}\right)^2}{4}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{4a}}$$
