Metodi Matematici - Lez. 22+Exe

Titolo nota

11 dicembre 2018 (9.30-11.15, 11:30-12:15) - docente: Prof. E. Callegari - Università di Roma *Tor Vergata*

DEF 1 Data $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ t.c. $f\in L^1([-b,b])$ per ogni $b>0$, definiamo:

SI LEGGE "VALOR PRINCIPALE"

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b} f(x)\,dx\,,$$ se tale limite esiste.

OSS 1 Ovviamente se $f\in L^1(\mathbb{R})$ si ha:

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx\,.$$

Tale uguaglianza però può non valere se $f\notin L^1(\mathbb{R})$.

Se ad esempio si prende $f(x)=\arctan x$, allora che $f(x)\notin L^1$ e quindi $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ non è ben definito, tuttavia:

PERCHÉ $\arctan x$ È DISPARI

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty}\arctan x\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b}\arctan x\,dx = \lim_{b\to+\infty} 0 = 0$$

TEO 1 (Formula di Inversione) Sia $f(x)\in L^1(\mathbb{R})$, C^1 a tratti e normalizzata, cioè tale che per ogni $x_0\in\mathbb{R}$ si abbia $f(x_0)=\frac{1}{2}\left(f(x_0^+)+f(x_0^-)\right)$.

Allora per ogni $x\in\mathbb{R}$ si ha:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\,v.p.\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\lambda)\,e^{i\lambda x}\,d\lambda \qquad (1)$$

ES 1 Mostrare che se $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ allora $\hat{f}(\lambda)=\pi e^{-|\lambda|}$.

Ricordiamo che se $g(x)=e^{-|x|}$ abbiamo $\hat{g}(\lambda)=\frac{2}{1+\lambda^2}\in L^1(\mathbb{R})$ e quindi la (1) può riscriversi:

$$g(-x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{g}(\lambda)\,e^{i\lambda(-x)}\,d\lambda$$

cioè:

$$e^{-|x|} = e^{-|-x|} = \frac{1}{\cancel{2}\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cancel{2}}{1+\lambda^2} e^{-i\lambda x} d\lambda$$

Scambiando i nomi alle 2 variabili x e λ si ottiene:

$$e^{-|\lambda|} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} e^{-i\lambda x} dx$$

cioè:

$$e^{-|\lambda|} = \frac{1}{\pi}\widehat{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}(\lambda)$$

Ciò significa che se $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ allora $\hat{f}(\lambda) = \pi e^{-|\lambda|}$.

$\boxed{\text{OSS. 2}}$ In generale, se $h(x) = \frac{1}{a^2+x^2}$, detta $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, si ha:

$$h(x) = \frac{1}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a^2}\cdot f\left(\frac{x}{a}\right)$$

quindi:

$$\hat{h}(\lambda) = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{a}}\cdot\hat{f}\left(\frac{\lambda}{\frac{1}{a}}\right) = \frac{1}{a}\hat{f}(a\lambda) = \frac{1}{a}\pi e^{-|a\lambda|} = \frac{\pi}{a} e^{-a|\lambda|}$$

$\boxed{\text{OSS 3}}$ Il metodo usato in $\boxed{\text{ES. 1}}$ per calcolare la trasformata di Fourier di $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, funziona in generale tutte le volte in cui $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ è sufficientemente regolare ed è riconoscibile come trasformata di Fourier di una funzione $g \in L^1(\mathbb{R})$, cioè $\hat{g}(x) = f(x)$. In tal caso infatti:

$$g(-x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\lambda) e^{i\lambda\cdot(-x)} d\lambda$$

cioè:

$$g(-\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(x) e^{-i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx = \frac{1}{2\pi}\hat{f}(\lambda)$$

cioè $\hat{f}(\lambda) = 2\pi\, g(-\lambda)$.

Ricapitolando, se $f(x)$ è regolare quanto basta e $\hat{g}(x) = f(x)$ allora
$\hat{f}(\lambda) = 2\pi\, g(-\lambda)$.

DEF. 2 (Convoluzione) Date $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ definiamo:

SI LEGGE "f CONVOLUTO g"

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, g(x-y)\, dy$$

OSS 4 Per giustificare alcuni dei passaggi successivi useremo il T. di Fubini e il T. di Tonelli, che per completezza richiamiamo:

T. DI FUBINI Se $F(x,y) \in L^1(\mathbb{R}^2)$ allora si ha:

1) Per quasi ogni $y \in \mathbb{R}$ la funzione $x \longmapsto F(x,y)$ sta in $L^1(\mathbb{R})$ e quindi per quasi ogni y $\quad G(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)\, dx \in \mathbb{R}$

2) $G(y) \in L^1(\mathbb{R})$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} G(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^2} F(x,y)\, dx\, dy$

IL TEOREMA VALE ANCHE SCAMBIANDO I RUOLI DI x E Y

T. DI TONELLI Sia $F(x,y)$ misurabile e non negativa su $\mathbb{R}^2$ e tale che:

1) Per quasi ogni $y \in \mathbb{R}$ la funzione $x \longmapsto F(x,y)$ sta in $L^1(\mathbb{R})$ e quindi per quasi ogni y $\quad G(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)\, dx \in \mathbb{R}$

2) $G(y) \in L^1(\mathbb{R})$

Allora $F \in L^1(\mathbb{R}^2)$ e $\int_{\mathbb{R}^2} F(x,y)\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} G(y)\, dy$

IL TEOREMA VALE ANCHE SCAMBIANDO I RUOLI DI x E Y

OSS 5 Grazie al T. di Tonelli possiamo dire che se $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ allora $|f(y)\, g(x-y)| \in L^1(\mathbb{R}^2)$ perché soddisfa le ipotesi (1) e (2) del T. di Tonelli.

Infatti per quasi ogni $y \in \mathbb{R}$ si ha $|f(y)| \in \mathbb{R}$ e quindi:

$$G(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y) \cdot g(x-y)| \, dx = |f(y)| \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x-y)| \, dx = |f(y)| \cdot \|g\|_{L^1}$$

Inoltre $G(y) \in L^1(\mathbb{R})$ perché:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(y) \, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)| \cdot \|g\|_{L^1} \, dy = \|g\|_{L^1} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)| \, dy = \|g\|_{L^1} \cdot \|f\|_{L^1}$$

Posso quindi applicare il T di Tonelli e dire che $|f(y) g(x-y)| \in L^1(\mathbb{R}^2)$ e quindi anche $f(y) g(x-y) \in L^1(\mathbb{R}^2)$.

OSS 6 Una volta osservato che se $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ allora $f(y) g(x-y) \in L^1(\mathbb{R}^2)$ possiamo applicare il T. di Fubini e dire che la funzione

$$G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) g(x-y) \, dy$$

è ben definita per quasi ogni $x \in \mathbb{R}$ e sta in $L^1(\mathbb{R})$.
Si noti che $G(x)$ è proprio $(f * g)(x)$.

ES. 2 Date $f(x) = g(x) = \chi_{[-1,1]}(x)$, calcolare $(f * g)(x)$.
Si ha:

PERCHÉ: $\chi_{[-1,1]}(x-y) = 1 \Leftrightarrow |x-y| \leq 1 \Leftrightarrow x-1 \leq y \leq x+1 \Leftrightarrow \chi_{[x-1,x+1]}(y) = 1$

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[-1,1]}(y) \cdot \chi_{[-1,1]}(x-y) \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[-1,1]}(y) \, \chi_{[x-1,x+1]}(y) \, dy =$$

$$= \text{mis}\left([-1,1] \cap [x-1, x+1] \right) = (2 - |x|)^+$$

SI VERIFICA DISTINGUENDO I CASI $|x| \geq 2$, $0 \leq x < 2$ E $-2 < x < 0$

TEO 2 Date $f, g \in L^1$ si ha $\widehat{f * g}(\lambda) = \hat{f}(\lambda) \cdot \hat{g}(\lambda)$.

DIMO Si ha:

$$\widehat{f * g}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) g(x-y) \, dy \right) e^{-i\lambda x} \, dx =$$

SICCOME $f,g \in L^1(\mathbb{R})$ SI HA $f(x)g(x-y)e^{-i\lambda x} \in L^1(\mathbb{R}^2)$ COME IN OSS. 5 E QUINDI, PER IL T. DI FUBINI, ENTRAMBI GLI INTEGRALI ITERATI SONO UGUALI ALL'INTEGRALE SU $\mathbb{R}^2$ E QUINDI TRA LORO

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) g(x-y) e^{-i\lambda x} \, dy \right) dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} f(y) g(x-y) e^{-i\lambda x} \, dy \, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) g(x-y) e^{-i\lambda x} \, dx \right) dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\lambda y} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-y) e^{-i\lambda (x-y)} \, dx \right) dy \overset{t = x-y}{=}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\lambda y} \cdot \overbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-i\lambda t} \, dt \right)}^{\text{NON DIPENDE DA } y} dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-i\lambda t} \, dt \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\lambda y} \, dy = \hat{g}(\lambda) \cdot \hat{f}(\lambda)$$

$\boxed{\text{ES. 3}}$ Abbiamo già visto nell'ES.2 che $\chi_{[-1,1]}(x) * \chi_{[-1,1]}(x) = (2-|x|)^+$.

Possiamo quindi affermare che se $f(x) = (2-|x|)^+$ allora:

$$\hat{f}(\lambda) = \left(\widehat{\chi_{[-1,1]}(x)}(\lambda) \right)^2 = \left(\frac{2 \sin \lambda}{\lambda} \right)^2 = \frac{4 \sin^2 \lambda}{\lambda^2}$$

Più in generale, se $g(x) = (a - |x|)^+$, con $a > 0$, allora

$$g(x) = \frac{a}{2} \left(2 - \left| \frac{x}{\frac{a}{2}} \right| \right)^+ = \frac{a}{2} f\left(\frac{2}{a} x \right)$$

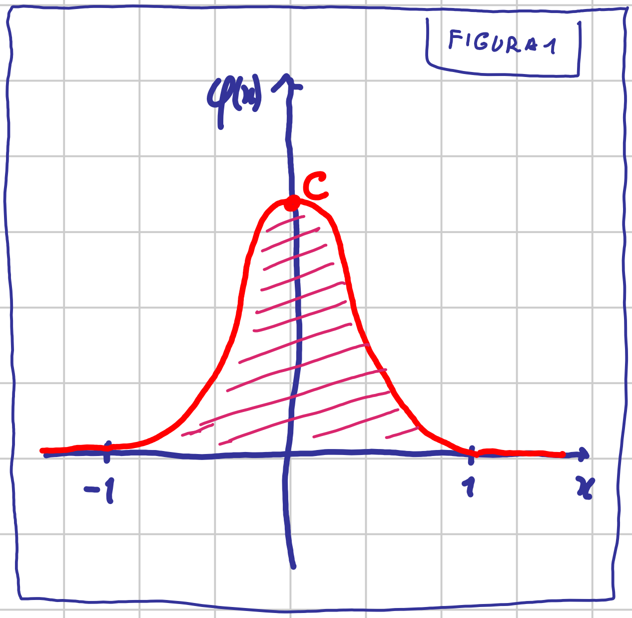
quindi:

$$\hat{g}(\lambda) = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{\frac{2}{a}} \cdot \hat{f}\left(\frac{\lambda}{\frac{2}{a}} \right) = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{4 \sin^2 \frac{a\lambda}{2}}{\frac{a^2 \lambda^2}{4}} = \frac{4 \sin^2\left(\frac{a\lambda}{2} \right)}{\lambda^2}$$

INTERMEZZO: REGOLARIZZAZIONE MEDIANTE CONVOLUZIONE

ES 4 Sia $\varphi(x)$ definita da:

$$\varphi(x)=\begin{cases} C\cdot e^{\frac{1}{x^2-1}} & x \ |x|<1 \\ 0 & x \ |x|\geq 1 \end{cases}$$



dove la costante C è scelta in modo che $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx=1$; allora $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Per la verifica basta osservare che, $\forall k\in\mathbb{N}$, nell'intervallo $(-1,1)$ la derivata k-esima di $\varphi(x)$ è della forma:

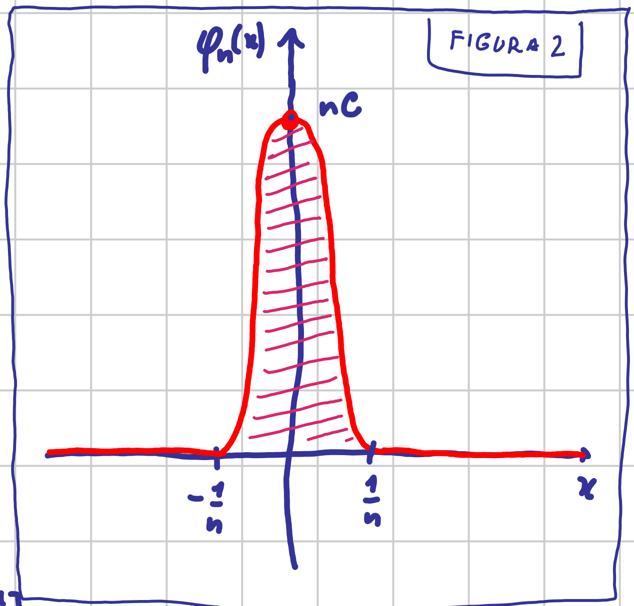
$$\varphi^{(k)}(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}\,e^{\frac{1}{x^2-1}} \quad \text{con } P(x) \text{ e } Q(x) \text{ polinomi.}$$

quindi si ha sempre:

$$\lim_{x\to\pm1}\varphi^{(k)}(x)=0$$

Se ora, per ogni $n\in\mathbb{N}-\{0\}$ definiamo

$$\varphi_n(x)=n\,\varphi(nx)$$



otteniamo (vedi figura 2) una funzione $C_0^\infty(\mathbb{R})$ positiva, pari, con supporto $[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]$ e con $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_n(x)\,dx=1$.

In tutto il resto della lezione indicheremo con φ_n tale funzione.

TEO 3 Sia $f\in L^1(\mathbb{R})$ e sia $\psi(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, allora $(f*\psi)(x)$ è derivabile e si ha:

$$(f*\psi)'(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)\,\psi'(x-y)\,dy=(f*\psi')(x)$$

DIMO Bisogna dimostrare che per ogni $x\in\mathbb{R}$ esiste finito il limite:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big((f*\psi)(x+h)-(f*\psi)(x)\Big)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)\psi(x+h-y)\,dy-\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)\,\psi(x-y)\,dy\right)=$$

SI PUÒ PASSARE AL LIMITE SOTTO IL SEGNO DI INTEGRALE GRAZIE AL TEO. DELLA CONV. DOMINATA PERCHÉ:

$$\left|f(y)\,\frac{\psi(x-y+h)-\psi(x-y)}{h}\right|\le |f(y)|\cdot\|\psi'\|_\infty$$

$$=\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)\,\frac{\psi(x-y+h)-\psi(x-y)}{h}\,dy=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)\,\psi'(x-y)\,dy=(f*\psi')(x)$$

TEO 3 bis Nelle stesse ipotesi del TEO. 3 si ottiene che $(f*\psi)(x)\in C^\infty(\mathbb{R})$ e per ogni $n\in\mathbb{N}$ si ha:

$$(f*\psi)^{(n)}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)\,\psi^{(n)}(x-y)\,dy=(f*\psi^{(n)})(x)$$

DIMO Basta applicare ripetutamente il TEO. 3, ricordando che se $\psi\in C^\infty$ anche $\psi'\in C^\infty$.

OSS 7 I teoremi 3 e 3.bis valgono in particolare quando $\psi=\varphi_n$.
Quando $f\in L^1(\mathbb{R})$ la funzione $(f*\varphi_n)(x)$ prende il nome di regolarizzata n-esima di f. La successione delle regolarizzate n-esime è una successione di funzioni $C^\infty(\mathbb{R})$ che converge a f nei modi indicati nei teoremi che seguono.

TEO 4 Se $f\in C_0(\mathbb{R})$ allora $f*\varphi_n\to f$ uniformemente

DIMO Per ogni $\varepsilon>0$ vogliamo mostrare che se n è sufficientemente grande si ha $\|f*\varphi_n-f\|_\infty<\varepsilon$.
A tale scopo osserviamo che, grazie al T. di Heine-Cantor, f è uniformemente continua quindi, una volta fissato $\varepsilon>0$, esisterà δ tale che:

$$|x-y|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

Prendiamo ora $n_0\in\mathbb{N}$ tale che:

$$\frac{1}{n_0}<\delta$$

Mostriamo ora che se $n > n_0$ allora $\| f * \varphi_n - f \|_\infty < \varepsilon$.

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed $n \geq n_0$ si ha:

SI PUÒ METTERLO SENZA CHE CAMBI NULLA PERCHÉ VALE 1.

$$\left| (f * \varphi_n)(x) - f(x) \right| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\varphi_n(x-y)\,dy - f(x) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x-y)\,dy \right| =$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \big(f(y) - f(x)\big) \varphi_n(x-y)\,dy \right| \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \big(f(y) - f(x)\big) \cdot \varphi_n(x-y) \right| dy =$$

PERCHÉ $\varphi_n(x-y) = 0$ se $|x-y| \geq \frac{1}{n}$ E $\varphi_n(x-y) > 0$ SE $|x-y| < \frac{1}{n}$

$$= \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} |f(y) - f(x)|\, \varphi_n(x-y)\,dy \leq$$

PERCHÉ SE $y \in \left[x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}\right]$ SI HA $|x-y| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \delta$ E QUINDI $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$

PERCHÉ $\int \varphi_n = 1$

$$\leq \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} \varepsilon \cdot \varphi_n(x-y)\,dy = \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon$$

Poiché questo vale $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall n \geq n_0$, passando al sup per $x \in \mathbb{R}$, si ottiene

$$\| f * \varphi_n - f \|_\infty \leq \varepsilon \quad \text{se} \quad n \geq n_0$$

Visto che $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ per cui ciò accade, abbiamo dimostrato che:

$$f * \varphi_n \longrightarrow f \quad \text{uniformemente.}$$

OSS. 8 La convergenza uniforme trovata nel **TEO. 4** implica anche la convergenza in $L^1(\mathbb{R})$ perché esiste un compatto che contiene sia il supporto di f che tutti quelli di $f * \varphi_n$. Infatti, essendo $f \in C_0(\mathbb{R})$ esiste $[a,b]$ tale che $f(x)$ è nulla fuori da $[a,b]$. Mostriamo che tutte le $f * \varphi_n$ sono nulle fuori da $[a-1, b+1]$. Infatti se $x \notin [a-1, b+1]$ si ha:

$$(f * \varphi_n)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\varphi_n(x-y)\,dy = \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(y)\varphi_n(x-y)\,dy = \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} 0 \cdot \varphi_n(x-y)\,dy = 0$$

PERCHÉ $\varphi_n(x-y) = 0$ PER $|x-y| \geq \frac{1}{n}$

PERCHÉ ESSENDO $x \notin [a-1, b+1]$ SI HA $\left[x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}\right] \cap [a,b] = \emptyset$

Il fatto che sia il supporto di f che quelli delle $f * \varphi_n$ siano tutti contenuti nello stesso intervallo limitato fa sì che dalla convergenza uniforme segua anche quella in $L^1(\mathbb{R})$.

OSS. 9 Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ allora $\|f * \varphi_n\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}$. Infatti:

$$\|f * \varphi_n\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, \varphi_n(x-y)\, dy \right| dx \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|\, \varphi_n(x-y)\, dy \right) dx =$$

USANDO I TEOREMI DI FUBINI E DI TONELLI COME NEL **TEO. 2**

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|\, \varphi_n(x-y)\, dx \right) dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)| \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x-y)\, dx \right) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)| \cdot 1 \, dy = \|f\|_{L^1}$$

TEO 5 Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ allora $f * \varphi_n \xrightarrow{L^1} f$.

DIMO $\forall \varepsilon > 0$ vogliamo dimostrare che se n è sufficientemente grande allora si ha $\|f * \varphi_n - f\|_{L^1} < \varepsilon$.

I Passo Prendo $g \in C_0(\mathbb{R})$ tale che $\|f - g\|_{L^1} < \frac{\varepsilon}{3}$. Posso farlo perché so già che $C_0(\mathbb{R})$ è denso in $L^1(\mathbb{R})$.

II Passo Grazie all' **OSS 8** so che $g * \varphi_n \to g$ in $L^1(\mathbb{R})$ quindi $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. se $n \geq n_0$ allora $\|g * \varphi_n - g\| < \frac{\varepsilon}{3}$.

III Passo Poiché $\|g - f\|_{L^1} < \frac{\varepsilon}{3}$ si ha anche:

$$\|g * \varphi_n - f * \varphi_n\|_{L^1} = \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\, \varphi_n(x-y)\, dy - \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, \varphi_n(x-y)\, dy \right\|_{L^1} =$$

$$= \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} (g(y)-f(y))\varphi_n(x-y)\,dy \right\|_{L^1} = \|(g-f)*\varphi_n\|_{L^1} \overset{\text{PER L'OSS 9}}{\leq} \|g-f\|_{L^1} \overset{\text{PER IL PASSO I}}{\leq} \frac{\varepsilon}{3}$$

$\boxed{\text{IV passo}}$ (Conclusione) $\forall \varepsilon > 0$, scegliendo g come nel $\boxed{\text{passo I}}$ e n_0 come nel $\boxed{\text{passo II}}$, per ogni $n \geq n_0$ si ha:

$$\|f*\varphi_n - f\|_{L^1} \leq \|f*\varphi_n - g*\varphi_n\|_{L^1} + \|g*\varphi_n - g\|_{L^1} + \|g-f\|_{L^1} \leq \underbrace{\frac{\varepsilon}{3}}_{\text{III Passo}} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{3}}_{\text{II Passo}} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{3}}_{\text{I Passo}} = \varepsilon$$

OSS 10 Il $\boxed{\text{II passo}}$ della dimostrazione appena vista è importante di per sé: ci dice che $C_0^\infty(\mathbb{R})$ è denso in $L^1(\mathbb{R})$ con la norma $\|\cdot\|_{L^1}$.

FINE LEZIONE E INIZIO ESERCITAZIONE

Nell'esercitazione sono stati svolti i seguenti problemi

1) PROB. 2 della prova simulata $\boxed{\text{SIM 2}}$
2) PROB. 2 della prova simulata $\boxed{\text{SIM 3}}$
3) PROB. 2 del I° App. Sess. Invernale A.A. 17/18, linkata come prova [1].
4) PROB. 2 del I° App. Sess. Estiva A.A. 17/18, linkata come prova [3]

Gli svolgimenti scritti di tali problemi si possono trovare nello stesso file .pdf in cui è contenuto il testo della prova.