Metodi Matematici - Lez. 23

Titolo nota

17 dicembre 2018 (14.00-15.45) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

DISTRIBUZIONI

DEF. 1 (Spazio delle funzioni Test) Indichiamo con $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ l'insieme:

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall k \in \mathbb{N} \text{ esiste } f^{(k)};\ \text{supp}(f) \text{ è compatto} \}.$$

Inoltre se $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ diremo che $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} \varphi$ se valgono entrambe le proprietà:

1) $\exists K \subset \mathbb{R}$, compatto, tale che $\text{supp}(\varphi) \subset K$ e $\text{supp}(\varphi_n) \subset K$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
2) $\forall m \in \mathbb{N}$ $\| \varphi_n^{(m)} - \varphi^{(m)} \|_{L^\infty(K)} \to 0$.

ES. 1 Esempi di funzioni in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ sono quelle definite nell' **ES. 4 LEZ. 22**.

DEF. 2 Diremo che $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è una "*distribuzione*" se è lineare e continua, cioè se:

1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ si ha $T(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha T(\varphi_1) + \beta T(\varphi_2)$.
2) $\forall (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ e $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, se $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} \varphi$ allora $T(\varphi_n) \to T(\varphi)$.

L'insieme di tutte le distribuzioni T si indica con $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ed è uno spazio vettoriale.

OSS 1 Essendo T lineare la condizione (2) di **DEF. 2** può essere sostituita dalla seguente:

2') $\forall (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, se $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} 0$ allora $T(\varphi_n) \to 0$.

che è solo apparentemente più debole.

DEF. 3 Sia $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, diremo che $T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} T$ se $\forall \varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ si ha $T_n(\varphi)\to T(\varphi)$.

ES. 2 Data una qualsiasi funzione $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, cioè tale che $f\in L^1(K)$ per ogni compatto $K\subset\mathbb{R}$, c'è un modo standard per costruire una distribuzione T_f a partire da f, ovvero:

$$T_f:\mathcal{D}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$$
$$\varphi\longmapsto\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx$$

T_f è una distribuzione perché è lineare e continua.

È lineare perché $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\forall\varphi_1,\varphi_2\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ si ha:

$$T_f(\alpha\varphi_1+\beta\varphi_2)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\big(\alpha\varphi_1(x)+\beta\varphi_2(x)\big)\,dx=$$
$$=\alpha\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_1(x)\,dx+\beta\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_2(x)\,dx=\alpha T_f(\varphi_1)+\beta T_f(\varphi_2)$$

È continua perché, se $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ e K è un compatto contenente il supporto di φ, allora vale la stima:

$$|T_f(\varphi)|=\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx\right|=\left|\int_K f(x)\varphi(x)\,dx\right|\le\int_K |f(x)|\cdot|\varphi(x)|\,dx\le$$
$$\le\int_K |f(x)|\cdot\|\varphi\|_\infty\,dx=\|\varphi\|_\infty\cdot\int_K|f(x)|\,dx=\|\varphi\|_\infty\cdot\|f\|_{L^1(K)}$$

Di conseguenza, se $\varphi_n\xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})}0$ allora, indicato con K un compatto che contenga tutti i supporti delle φ_n, si ha:

$$|T_f(\varphi_n)|\le\|f\|_{L^1(K)}\cdot\|\varphi_n\|_\infty\to0$$

E quindi $T_f(\varphi_n)\to0$.

$\boxed{\text{OSS. 2}}$ È utile notare che passando da f a T_f non vanno perse troppe informazioni, nel senso che $f(x)$ è determinata quasi ovunque dalla sola conoscenza di T_f. Infatti se per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ $T_{f_1}(\varphi) = T_{f_2}(\varphi)$ ciò significa che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x)\,\varphi(x)\,dx \qquad \text{per ogni } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

cioè che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \big(f_1(x) - f_2(x)\big)\,\varphi(x)\,dx \qquad \text{per ogni } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

Ma grazie al prossimo teorema che dimostreremo ($\boxed{\text{TEO. 1}}$) da ciò segue che:

$$f_1(x) - f_2(x) = 0 \qquad \text{quasi ovunque,}$$

cioè:

$$f_1(x) = f_2(x) \qquad \text{quasi ovunque.}$$

$\boxed{\text{TEO 1}}$ Sia $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tale che $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ si abbia $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx = 0$.
Allora $f(x) = 0$ quasi ovunque.

$\boxed{\text{DIMO}}$ $\boxed{\text{I Passo}}$ Mostriamo che:

(1)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\psi(x)\,dx = 0 \qquad \text{per ogni } \psi \in C_0(\mathbb{R})$$

A tale scopo, per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, indichiamo con φ_n la solita funzione a campana di classe C^∞, con supporto $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$, positiva e con $\int \varphi_n = 1$.
Se ora $\psi(x)$ è una funzione di classe $C_0(\mathbb{R})$ con supporto contenuto in $[a,b]$ allora, posto $\psi_n(x) = (\psi * \varphi_n)(x)$, abbiamo che ψ_n è una funzione di classe $C^\infty(\mathbb{R})$ tale che:

A) $\psi_n(x) \to \psi(x)$ uniformemente (per $\boxed{\text{TEO 4-LEZ. 22}}$)

B) $\text{supp}(\psi_n) \subset [a-1, b+1]$ perché se $x \notin [a-1, b+1]$ si ha:

$$\psi_n(x) = (\psi * \varphi_n)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y)\,\varphi_n(x-y)\,dy =$$

$\boxed{\text{PERCHÈ } \text{supp}(\varphi_n) = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]}$

PERCHÉ SE $x \notin [a-1,b+1]$ ALLORA $\left[x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}\right]\cap[a,b]=\emptyset$ E QUINDI SU $\left[x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}\right]$ ψ È IDENTICAMENTE NULLA PERCHÉ $\mathrm{supp}(\psi)\subset[a,b]$

$$= \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} \psi(y)\,\varphi_n(x-y)\,dy = \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} 0\cdot\varphi_n(x-y)\,dy = 0$$

Otteniamo quindi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\psi_n(x)\,dx = \int_{a-1}^{b+1} f(x)\,\psi_n(x)\,dx \longrightarrow \int_{a-1}^{b+1} f(x)\,\psi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\psi(x)\,dx$$

PERCHÉ $\mathrm{SUPP}(\psi_n)\subset[a-1,b+1]$

PERCHÉ $\psi_n\to\psi$ UNIFORMEMENTE

PERCHÉ $\mathrm{SUPP}(\psi_n)\subset[a,b]\subset[a-1,b+1]$

Ma per ogni $n\in\mathbb{N}-\{0\}$ si ha:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\psi_n(x)\,dx = 0$$

perché $\psi_n\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, quindi anche:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\psi(x)\,dx = 0$$

perché è limite di una successione identicamente nulla.
Quindi abbiamo dimostrato (1).

$\boxed{\text{II Passo}}$ Mostriamo che $\forall E\subset\mathbb{R}$, con E misurabile e limitato, si ha $\int_E f(x)\,dx = 0$.

Poiché E è misurabile e limitato, per ogni $n\in\mathbb{N}-\{0\}$ possiamo scegliere un aperto A_n e un compatto K_n tali che $K_n\subset E\subset A_n$ e $m(A_n-K_n)<\frac{1}{n}$.
Inoltre, visto che E è limitato si può sempre fare in modo che tutti gli A_n e i K_n siano contenuti nello stesso intervallo $[a,b]$ e che sia $V_n\supset V_{n+1}\supset K_{n+1}\supset K_n$.
Ora, per ogni $n\in\mathbb{N}-\{0\}$ indichiamo con C_n il complementare di A_n e definiamo:

$$\psi_n(x) = \frac{d(x,C_n)}{d(x,C_n)+d(x,K_n)}$$

Sappiamo già (da quando abbiamo mostrato la densità di $C_0(\mathbb{R})$ in $L^1(\mathbb{R})$) che ψ_n ha le seguenti proprietà:

A) $\psi_n(x)\in C_0(\mathbb{R})$

$$(2)\quad \begin{cases} B)\ \ \psi_n(x) = 0 \quad \text{per } x \notin V_n \ \ (\text{in particolare supp}(\psi_n) \subset [a,b]) \\ C)\ \ \psi_n(x) = 1 \quad \text{per } x \in K_n \\ D)\ \ 0 \leq \psi_n(x) \leq 1 \quad \text{per } x \in V_n - K_n \end{cases}$$

Per mostrare che:

$$(3) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\psi_n(x)\,dx \to \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\chi_E(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx$$

osserviamo che:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\big(\psi_n(x) - \chi_E(x)\big)\,dx \right| = \left| \int_a^b f(x)\big(\psi_n(x) - \chi_E(x)\big)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,|\psi_n(x) - \chi_E(x)|\,dx \leq$$

GRAZIE A (2)

$$\leq \int_a^b |f(x)|\,\chi_{V_n - K_n}(x)\,dx \longrightarrow \int_a^b 0\,dx = 0$$

GRAZIE AL T. DELLA CONVERGENZA DOMINATA PERCHÉ

1) TUTTE LE FUNZIONI SONO DOMINATE DA $|f(x)| \in L^1([a,b])$

2) $\chi_{V_n - K_n}(x) \longrightarrow 0$ q.o. PERCHÉ $V_n - K_n \supset V_{n+1} - K_{n+1}$ E $m(V_n - K_n) = \frac{1}{n} \to 0$

Quindi vale (3). Ma siccome $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$ si ha:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\psi_n(x)\,dx = 0$$

perché $\psi_n \in C_0(\mathbb{R})$, allora si ha anche:

$$\int_E f(x)\,dx = 0$$

perché è limite di una successione identicamente nulla.

$\boxed{\text{III Passo}}$ Mostriamo che l'insieme $B = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\}$ ha misura nulla.

Per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ poniamo:

$$B_n = \{x \in [-n, n] \mid f(x) > \tfrac{1}{n}\}.$$

Otteniamo che $(B_n)_{n \in \mathbb{N} - \{0\}}$ è una successione crescente di insiemi misurabili e limitati e che:

$$B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$$

Ma $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$ abbiamo:

PERCHÉ SU B_n SI HA $f(x) \geq \frac{1}{n}$

GRAZIE AL $\boxed{\text{II PASSO}}$ PERCHÉ B_n È MISURABILE E LIMITATO

$$0 = \int_{B_n} f(x)\,dx \geq \int_{B_n} \frac{1}{n}\,dx = \frac{1}{n} \cdot m(B_n)$$

da cui segue che $m(B_n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Ma allora:

$$m(B) = \lim_{n \to +\infty} m(B_n) = \lim_{n \to +\infty} 0 = 0$$

$\boxed{\text{IV Passo}}$ Anche l'insieme $C = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < 0\}$ ha misura nulla (la dimostrazione è identica a quella del III passo).

Possiamo quindi concludere che $f(x) = 0$ quasi ovunque.

$\boxed{\text{ES. 3}}$ (Delta di Dirac) Fissato $x_0 \in \mathbb{R}$ definiamo:

$$T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$\varphi \mapsto \varphi(x_0)$$

Verifichiamo che T è una distribuzione, cioè che è lineare e continua.

È lineare perché $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ si ha:

$$T(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = (\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2)(x_0) = \alpha\varphi_1(x_0) + \beta\varphi_2(x_0) = \alpha T(\varphi_1) + \beta T(\varphi_2)$$

È continua perché se $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} 0$ allora:

$$T(\varphi_n) = \varphi_n(x_0) \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \to +\infty$$

Quindi T è una distribuzione che prende il nome di "delta di Dirac in x_0" e si indica, invece che con T, col simbolo δ_{x_0}.

ES. 4 Per ogni $n \in \mathbb{N}-\{0\}$ definiamo $f_n = \frac{n}{2} \cdot \chi_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}$ e $T_n = T_{f_n}$.

Ovviamente per ogni $n \in \mathbb{N}-\{0\}$ si ha $T_n \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ perché $f_n \in L^1(\mathbb{R})$.

Vogliamo mostrare che $T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta_0$, dove δ_0 è la delta di Dirac in 0.

A tale scopo basta osservare che, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, si ha:

$$T_n(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{2} \chi_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}(x)\, \varphi(x)\, dx = \frac{1}{\frac{2}{n}} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi(x)\, dx = \varphi(\xi_n) \longrightarrow \varphi(0) = \delta_0(\varphi)$$

PERCHÈ, PER IL T. DELLA MEDIA INTEGRALE, $\exists\, \xi_n \in [-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]$ CHE RENDE VERA L'UGUAGLIANZA

PERCHÈ φ È CONTINUA E $\xi_n \to 0$ PER $n \to 0$

DEF. 4 Data $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ definiamo la sua derivata T' nel modo seguente:

$$T' : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$\varphi \longmapsto -T(\varphi').$$

OSS 3 La T' definita nella $\boxed{\text{DEF. 4}}$ è sempre una distribuzione, perché T' risulta sempre lineare e continua.

È lineare perché, per ogni $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ e per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si ha:

$$T'(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = -T((\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2)') = -T(\alpha\varphi_1' + \beta\varphi_2') = -\alpha T(\varphi_1') - \beta T(\varphi_2') = \alpha T'(\varphi_1) + \beta T'(\varphi_2).$$

È continua perché se $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ allora anche $\varphi_n' \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ e quindi

$$T'(\varphi_n) = -T(\varphi_n') \to 0.$$

Si osservi che, visto che T' esiste sempre, questo significa che una distribuzione T è sempre derivabile.

OSS 4 A prima vista la $\boxed{\text{DEF 4}}$ può sembrare strana. Il motivo per cui la si sceglie come definizione di derivata di una distribuzione è che, in tal modo, se $f \in C^1$ e si deriva la distribuzione T_f si ottiene proprio $T_{f'}$. Infatti, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ si ha:

$$(T_f)'(\varphi) = -T_f(\varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi'(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,\varphi(x)\,dx = T_{f'}(\varphi)$$

INTEGRANDO PER PARTI E RICORDANDO CHE φ È A SUPPORTO COMPATTO

OSS 5 Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ ed esiste $g \in L^1(\mathbb{R})$ t.c. $(T_f)' = T_g$, diremo che g è derivata di f in senso debole. Si osservi che, grazie a **TEO. 1**, la derivata debole di f, se esiste, è essenzialmente unica.

Se definiamo:

$$W_{1,1} = \{ f \in L^1 \mid \text{esiste la sua derivata debole } f' \in L^1(\mathbb{R}) \}$$

è possibile dimostrare che $W_{1,1}$ è di Banach rispetto alla norma:

$$\| f \|_{1,1} = \| f \|_{L^1} + \| f' \|_{L^1}$$
