

Metodi Matematici - Lez. 24-Exe

Titolo nota

18 dicembre 2018 (9.30-11.15, 11.30-12.15) - docente: Prof. E. Callegari - Università di Roma Tor Vergata

DISTRIBUZIONI (... CONTINUA...)

ES. 1 Determinare $(T_{|x|})'$. $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ si ha:

$$\begin{aligned}(T_{|x|})'(\varphi) &= -T_{|x|}(\varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \varphi'(x) dx = -\int_{-\infty}^0 x \varphi'(x) dx - \int_0^{+\infty} x \varphi'(x) dx \\&= \left[x \varphi(x) \right]_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 \varphi(x) dx - \left[x \varphi(x) \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx \\&= 0 + \int_{-\infty}^0 \varphi(x) dx + 0 + \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = T_{\eta(x)}(\varphi)\end{aligned}$$

INTEGRANDO PER PARTI

Quindi $(T_{|x|})' = T_{\eta(x)}$

ES. 2 Determinare $(T_{\eta(x)})'$. $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ si ha:

$$\begin{aligned}(T_{\eta(x)})'(\varphi) &= -T_{\eta(x)}(\varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} \eta(x) \varphi'(x) dx \\&= \int_{-\infty}^0 \varphi'(x) dx - \int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0) + \varphi(0) = 2\delta_0(\varphi)\end{aligned}$$

Quindi $(T_{\eta(x)})' = 2\delta_0$.

ES. 3 Sia T_c la distribuzione associata alla funzione costante $f(x) = c$.

Mostrare che $(T_c)' = 0$, dove 0 è la distribuzione identicamente nulla.

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ si ha:

$$(T_c)'(\varphi) = -T_c(\varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} c \varphi'(x) dx = -c \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x) dx = -c \cdot 0 = 0$$

PERCHÉ φ È A SUPPORTO COMPATTO

Quindi $(T_c)'$ è la distribuzione identicamente nulla.

OSS 1 La situazione descritta nell'esempio 3 può essere invertita, cioè possiamo dimostrare che se $T' = 0$ allora T è del tipo T_c . Per dimostrarlo è più

Comodo prima enunciare e dimostrare il seguente:

LEMMA 1 Data $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, è equivalente affermare che:

(a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 0$

(b) $\exists \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ t.c. $\psi' = \varphi$.

DIMO Mostriamo che (b) $\Rightarrow$ (a) e che (a) $\Rightarrow$ (b).

(b) $\Rightarrow$ (a) Questo è ovvio poiché se $\varphi(x) = \psi'(x)$ con $\psi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ allora:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi'(x) dx = 0$$

GRAZIE AL TEOR. FOND. DEL C.I. E AL FATTO CHE ψ È A SUPPORTO COMPATTO

(a) $\Rightarrow$ (b) Definiamo $\psi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$. Ovviamente $\psi'(x) = \varphi(x)$ e quindi $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Rimane da verificare che ψ è a supporto compatto. A tale scopo, preso $[a, b] \subset \mathbb{R}$ t.c. $\text{supp } \varphi \subset [a, b]$, mostriamo che anche $\text{supp } \psi \subset [a, b]$. Infatti, se $x < a$ si ha:

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0,$$

PERCHÉ PER $t < a$ $\varphi(t)$ È IDENTICAMENTE NULLA

mentre se $x > b$ si ha:

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = 0$$

PERCHÉ PER $t > b$ $\varphi(t)$ È IDENTICAMENTE NULLA

GRAZIE AD (a)

Quindi anche $\text{supp } \psi \subset [a, b]$ e quindi $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

TEO. 1 Data $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, se T' è identicamente nulla allora $\exists c \in \mathbb{R}$ tale che $T = Tc$.

DIMO Dire che T' è identicamente nulla significa dire che $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ si ha:

$$0 = T'(\varphi) = -T(\varphi')$$

cioè che per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ si ha:

$$T(\varphi') = 0.$$

Grazie al **LEMMA 1** ciò equivale ad affermare che:

(1) $T(\varphi) = 0$ per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ t.c. $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 0$

Prendiamo ora $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ t.c. $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(x) dx = 1$ e sia $c = T(\varphi_0)$.

Vogliamo mostrare che $T = T_c$.

Per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, se $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 0$ si ha ovviamente:

GRAZIE AL FATTO CHE $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 0$

GRAZIE A (*)

$$T(\varphi) = 0 = c \cdot 0 = c \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} c \varphi(x) dx = T_c(\varphi)$$

Invece, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ t.c. $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx \neq 0$, posto:

$$\psi(x) = \varphi_0(x) - \frac{\varphi(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx}$$

si ottiene che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(x) dx - \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1 - 1 = 0$$

Quindi:

GRAZIE A (*)

$$0 = T(\psi) = T\left(\varphi_0 - \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx} \cdot \varphi\right) = T(\varphi_0) - \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx} T(\varphi)$$

da cui segue:

$$T(\varphi) = T(\varphi_0) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = c \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} c \varphi(x) dx = T_c(\varphi)$$

Quindi, in ogni caso $T(\varphi) = T_c(\varphi)$.

NOTAZIONE 1

Se $f \in C^n(K)$ con K compatto si usa la notazione

$$\|f\|_{\infty, n} = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty} + \|f''\|_{\infty} + \dots + \|f^{(n)}\|_{\infty}$$

dove l'insieme in cui varia x è K .

TEO 2

Sia $T: \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ lineare, allora è equivalente affermare che:

(a) T è una distribuzione (cioè è anche continua)

(b) $\forall K \subset \mathbb{R}$, con K compatto, $\exists C_K > 0$ ed $\exists n_K \in \mathbb{N}$ tali che

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ con $\text{supp}(\varphi) \subset K$ si ha $|T(\varphi)| \leq C_K \|\varphi\|_{\infty, n_K}$

DIMO

(b) $\Rightarrow$ (a)

Per mostrare che vale (a) dobbiamo per vedere che se $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} 0$

allora $T(\varphi_n) \rightarrow 0$. Se $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} 0$ allora esiste K_0 compatto tale che

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\sup \varphi_n \subset K_0$ ed inoltre, $\forall i \in \mathbb{N}$ $\|\varphi_n^{(i)}\|_\infty \rightarrow 0$.

Ma poiché T soddisfa (b) se che esiste $C_{k_0} > 0$ e $n_{k_0} \in \mathbb{N}$ tali che

$$|T(\varphi_n)| \leq C_{k_0} \|\varphi_n\|_{\infty, n_{k_0}}$$

A questo punto basta osservare che se $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)} 0$ allora $\|\varphi_n\|_{\infty, n_{k_0}} \rightarrow 0$ per avere che $T(\varphi_n) \rightarrow 0$.

Ciò significa che, se vale (b), allora da $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)} 0$ segue che $T(\varphi_n) \rightarrow 0$, cioè vale (a).

(a) $\Rightarrow$ (b) Ragioniamo per assurdo: mostriamo cioè che se T non soddisfa (b) allora è possibile costruire una successione $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)} 0$ ma tale che $T(\varphi_n) \not\rightarrow 0$. Infatti dire che non vale (b) significa dire che:

$\exists K$ compatto di $\mathbb{R}$ t.c. $\forall c > 0 \forall n \in \mathbb{N} \exists \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ t.c. $\sup \varphi \subset K$ e $|T(\varphi)| > c \|\varphi\|_{\infty, n}$

In particolare, $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$ esiste $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ con $\sup \varphi_n \subset K$ t.c.

$$(2) \quad |T(\varphi_n)| > n \|\varphi_n\|_{\infty, n}$$

ci propongo:

$$\psi_n = \frac{\varphi_n}{n \cdot \|\varphi_n\|_{\infty, n}}$$

otteniamo che, per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, si ha:

$$(3) \quad \psi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \text{ e in particolare } \sup(\psi_n) = \sup(\varphi_n) \subset K$$

$$(4) \quad \|\psi_n\|_{\infty, n} = \left\| \frac{\varphi_n}{n \cdot \|\varphi_n\|_{\infty, n}} \right\| = \frac{1}{n \cdot \|\varphi_n\|_{\infty, n}} \cdot \|\varphi_n\|_{\infty, n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

GRAZIE A (2)

$$(5) \quad |T(\psi_n)| = \left| T\left(\frac{\varphi_n}{n \cdot \|\varphi_n\|_{\infty, n}}\right) \right| = \frac{1}{n \cdot \|\varphi_n\|_{\infty, n}} \cdot |T(\varphi_n)| > \frac{1}{n \cdot \|\varphi_n\|_{\infty, n}} \cdot n \|\varphi_n\|_{\infty, n} = 1$$

Si osservi che, grazie a (4), $\forall m \in \mathbb{N}$ si ha

$$(6) \quad \|\psi_n^{(m)}\|_\infty \leq \|\psi_n\|_{\infty, n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

SE $n \geq m$ PER $n \rightarrow +\infty$

Combinando (6) con (3) si ottiene che $\psi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} 0$, ma tuttavia $T(\psi_n) \not\rightarrow 0$ perché da (5) segue che $|T(\psi_n)| > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
 Ma questo è in contraddizione col fatto che T deve soddisfare (a).
 Quindi si arriva ad assurdo supponendo che non valga (b). Quindi (b) vale.

OSS. 2 Sia $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e sia $K \subset \mathbb{R}$ un compatto. Ci sono molti modi di scegliere n_K e C_K in modo che valga (b), ci sarà però un valore minimo per n_K . D'ora in poi (in particolare nella definizione successiva) supponiamo sempre che, fissato K , n_K indichi sempre il MINIMO intero tale che vale (b) nel TED. 2.

DEF. 1 (Ordine di una distribuzione) Sia $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, per ogni K compatto di $\mathbb{R}$ sia $n_K \in \mathbb{N}$ il minimo intero per cui vale (b) nel TED. 2.
 Allora definiamo:

$$\text{Ordine di } T = \sup_{\substack{K \subset \mathbb{R} \\ K \text{ compatto}}} n_K$$

ES. 4 Se $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ allora T_f ha ordine zero. Infatti $\forall K \subset \mathbb{R}$ compatto e per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ con $\text{supp } \varphi \subset K$ mostriamo che si ha:

$$|T(\varphi)| \leq C_K \cdot \|\varphi\|_{\infty} = C_K \cdot \|\varphi\|_{\infty, 0}$$

$$\text{dove } C_K = \int_K |f(x)| dx.$$

Questo perché:

$$|T(\varphi)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \cdot |\varphi(x)| dx = \int_K |f(x)| \cdot |\varphi(x)| dx \leq$$

$$\leq \int_K |f(x)| \cdot \|\varphi\|_{\infty} dx = \|\varphi\|_{\infty} \cdot \int_K |f(x)| dx = C_K \cdot \|\varphi\|_{\infty}$$

PERCHÉ $\text{supp } \varphi \subset K$

ES. 5 δ_0 ha ordine zero. Infatti $\forall k \in \mathbb{R}$ con k congruo si ha

$$|\delta_0(\varphi)| = |\varphi(0)| \leq \|\varphi\|_\infty = 1 \cdot \|\varphi\|_{\infty,0}$$

ES. 6Sia $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ definita da $T(\varphi) = \varphi'''(0)$ per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Vogliamo mostrare che T ha ordine 3. Per cominciare è facile verificare che, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, si ha:

$$(7) \quad |T(\varphi)| = |\varphi'''(0)| \leq \|\varphi'''\|_\infty \leq 1 \cdot \|\varphi\|_{\infty,3}$$

Rimane però da verificare che non può valere una stima analogo a (7) con $\|\varphi\|_{\infty,2}$.

A tale scopo basta costruire (ψ_n) successiva in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ tale che $\|\psi_n\|_{\infty,2} \rightarrow 0$ ma $T(\psi_n) \not\rightarrow 0$. Per esempio, presa $\psi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ t.c. $\psi'''(0) \neq 0$, per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ definiamo:

$$\psi_n(x) = \frac{1}{n^3} \psi(nx)$$

quindi otteniamo:

$$\begin{aligned} \|\psi_n\|_{\infty,2} &= \left\| \frac{1}{n^3} \psi(nx) \right\|_\infty + \left\| \frac{1}{n^2} \psi'(nx) \right\|_\infty + \left\| \frac{1}{n} \psi''(nx) \right\|_\infty = \\ &= \frac{1}{n^3} \|\psi\|_\infty + \frac{1}{n^2} \|\psi'\|_\infty + \frac{1}{n} \|\psi''\|_\infty \rightarrow 0 \end{aligned}$$

E tuttavia, per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, si ha:

$$T(\psi_n) = \psi_n'''(0) = \frac{1}{n^3} \cdot n^3 \psi'''(0) = \psi'''(0)$$

Quindi $T(\psi_n) \not\rightarrow 0$ anche se $\|\psi_n\|_{\infty,2} \rightarrow 0$, quindi non si può sperare di avere una disuguaglianza di tipo (7) con una norma di ordine più basso di 3.

Questo significa che l'ordine di T è 3.

ES. 7

Sia $T: \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $T(\varphi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi^{(n)}(1)$. Mostriamo che T è una distribuzione di ordine infinito.

Per prima cosa osserviamo che, essendo φ a supporto compatto, $T(\varphi)$ è sempre una somma finita e quindi è sempre ben definita.

La linearità di T segue subito dalla linearità delle derivate n -esime.

Verifichiamo che se $K \subset (-n-1, n+1)$ allora $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ con $\text{supp } \varphi \subset K$ si ha:

$$|T(\varphi)| \leq 1 \cdot \|\varphi\|_{\infty, n}$$

Infatti:

PERCHÉ $\text{supp}(\varphi) \subset (-n-1, n+1)$

$$|T(\varphi)| = \left| \sum_{i=0}^n \varphi^{(i)}(i) \right| \leq \sum_{i=0}^n |\varphi^{(i)}(i)| \leq \sum_{i=0}^n \|\varphi^{(i)}\|_{\infty} = \|\varphi\|_{\infty, n}$$

Questo basta a dimostrare che T è una distribuzione. Per mostrare che ha ordine infinito basta mostrare che per ogni $m \in \mathbb{N} - \{0\}$ è possibile costruire una successione (ψ_n) in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ tale che tutti i $\text{supp}(\psi_n)$ siano contenuti nello stesso compatto e inoltre $\|\psi_n\|_{\infty, m-1} \rightarrow 0$ ma $T(\psi_n) \rightarrow 0$.

A tale scopo, comunque sia dato fisso $m \in \mathbb{N}$, prendiamo $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tale che $\text{supp } \psi \subset (m-1, m+1)$ e $\psi^{(m)} \neq 0$. Poi, per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, definiamo:

$$\psi_n(x) = \frac{1}{n^m} \cdot \psi(n(x-m)+m)$$

Otteniamo che (ψ_n) ha le seguenti proprietà:

$$(8) \quad \text{supp}(\psi_n) \subset \left(m - \frac{1}{n}, m + \frac{1}{n}\right)$$

PERCHÉ $x \in \left(m - \frac{1}{n}, m + \frac{1}{n}\right) \Leftrightarrow (x-m) \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \Leftrightarrow n(x-m) \in (-1, 1) \Leftrightarrow n(x-m)+m \in (m-1, m+1)$

$$(9) \quad \psi_n^{(i)}(x) = \frac{1}{n^{m-i}} \cdot \psi^{(i)}(n(x-m)+m)$$

Quindi, $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$ si ha:

GRAZIE A (8)

$$T(\psi_n) = \sum_{i=0}^{+\infty} \psi_n^{(i)}(i) = \psi_n^{(m)}(m) = \frac{1}{n^{m-m}} \cdot \psi^{(m)}(n(m-m)+m) = \psi^{(m)}(m) \neq 0$$

Cioè, per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $T(\psi_n)$ ha sempre lo stesso valore $\psi^{(m)}(m) \neq 0$, e quindi $T(\psi_n) \not\rightarrow 0$. Tuttavia si ha:

$$\|\psi_n\|_{\infty, m-1} = \|\psi_n\|_{\infty} + \|\psi_n'\|_{\infty} + \dots + \|\psi_n^{(m-1)}\|_{\infty} =$$

GRAZIE A (9)

$$= \frac{1}{n^m} \|\psi\|_\infty + \frac{1}{n^{m-1}} \|\psi'\|_\infty + \dots + \frac{1}{n} \|\psi^{(m-1)}\|_\infty \rightarrow 0$$

Questo significa che per ogni $m \in \mathbb{N} - \{0\}$ riusciamo a trovare un compatto K tale che la stima:

$$|T(\varphi)| \leq C \cdot \|\varphi\|_{\infty, m-1}$$

non vale per tutte le φ con supporto in K . Ciò significa che l'ordine di T supera qualsiasi intero $m-1$. Cioè l'ordine di T è $+\infty$.

ES 8

Cosa succede se, nell'ES. 7, si cambia la definizione di T ponendo:

$$T(\varphi) = \sum_{i=1}^{+\infty} \varphi^{(i)}\left(\frac{1}{2}\right) ?$$

Premesso che non è scontato che T sia ben definita perché non è scontato che la serie che si ottiene diverga, e anche ciò occorrendo, la T non potrebbe essere una distribuzione, perché prendendo come compatto $K = [0, 1]$ sarebbe possibile trovare $m \in \mathbb{N}$ e $C > 0$ in modo che valga la stima

$$|T(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_{\infty, m}$$

per tutte le $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tali che $\text{supp } \varphi \subset [0, 1]$.

Infatti, procedendo in modo simile a quanto fatto nell'ES. 7, per ogni fissato $i \in \mathbb{N} - \{0\}$, si prende $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ t.c. $\text{supp } \psi \subset \left(\frac{1}{2^{i+1}}, \frac{1}{2^{i-1}}\right)$ e $\psi^{(i)}\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$. Poi si definisce una successione $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N} - \{0\}}$ ponendo:

$$\psi_n(x) = \frac{1}{n^i} \psi\left(n\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\right)$$

Procedendo come nell'ES. 7 si ottiene $T(\psi_n) = \psi^{(i)}\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, ma $\|\psi_n\|_{\infty, i-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ per $n \rightarrow +\infty$.

Ciò significa che $\forall i \in \mathbb{N} - \{0\}$ e $\forall C > 0$ esiste una $\psi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ con $\text{supp } (\psi_n) \subset [0, 1]$ che rende falsa la disuguaglianza $|T(\psi_n)| \leq C \cdot \|\psi_n\|_{\infty, i-1}$.

DEF. 2 Sia $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e sia $A \subset \mathbb{R}$ aperto. Diciamo che T si annulla su A se per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ con $\text{supp } \varphi \subset A$ si ha $T(\varphi) = 0$.

DEF. 3 Sia $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, il supporto di T è il complementare dell'unione di tutti gli aperti in cui T si annulla.

OSS. 3 Poiché l'unione di tutti gli aperti in cui T si annulla è ancora un aperto in cui T si annulla (grazie al TEO. successivo), nella **DEF. 3** avremmo potuto scrivere: il supporto di T è il complementare del più grande aperto in cui T si annulla.

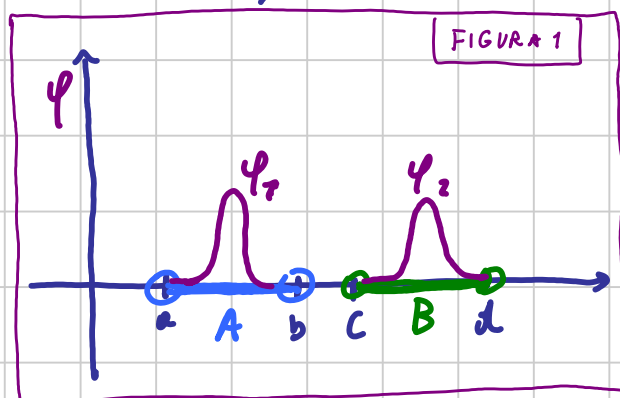
TEO. 3 Sia $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e sia $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una famiglia (anche infinita) di aperti in cui T si annulla. Allora $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ è ancora un aperto in cui T si annulla.

DIMO (solo idea) Faremo la dimostrazione nel caso particolare di 2 intervalli aperti e cercheremo come si possa utilizzarlo per arrivare al caso generale. Siano dunque dati 2 intervalli aperti $A = (a, b)$ e $B = (c, d)$ in cui T si annulla. Vogliamo mostrare che T si annulla su $A \cup B$, cioè che $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tale che $\text{supp } \varphi \subset A \cup B$ si ha $T(\varphi) = 0$.

A tale scopo basterà mostrare che si riesce sempre a scrivere $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ dove $\text{supp } \varphi_1 \subset A$ e $\text{supp } \varphi_2 \subset B$, in modo tale da ottenere:

PERCHÉ T SI ANNULLA SU $A \cup B$

$$T(\varphi) = T(\varphi_1) + T(\varphi_2) = 0 + 0 = 0$$



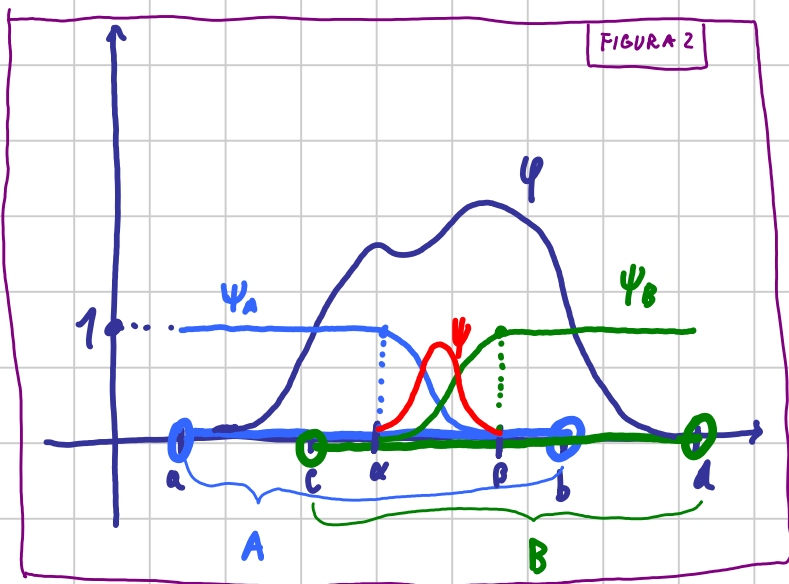
Ora, se A e B sono disgiunti, trovare φ_1 e φ_2 è ovvio perché basta prendere $\varphi_1 = \varphi|_A$ e $\varphi_2 = \varphi|_B$ (vedi figura 1). Invece se A e B hanno una zona in cui si sovrappongono bisogna fare in un altro modo (vedi figura 2)

Prendiamo $[a, b] \subset (c, d) = A \cap B$ e sia $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ con $\text{supp } \psi = [a, b]$ e tale che $\int_a^b \psi(x) dx = 1$.

Definiamo poi $\psi_B(x) = \int_{-\infty}^x \psi(t) dt$ e $\psi_A(x) = 1 - \psi_B(x)$.

Si ottiene che $\psi_A, \psi_B \in C^\infty(\mathbb{R})$ e inoltre valgono le proprietà:

- (a) $\psi_A(x) + \psi_B(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- (b) $\psi_A(x) = 0$ e $\psi_B(x) = 1 \quad \forall x \geq b$
- (c) $\psi_A(x) = 1$ e $\psi_B(x) = 0 \quad \forall x \leq a$



Ma allora se $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ con $\text{supp } \varphi \subset (a, d) = A \cup B$, pongo:

$$\varphi_1(x) = \varphi(x) \cdot \psi_A(x) \quad \text{e} \quad \varphi_2(x) = \varphi(x) \cdot \psi_B(x)$$

e dunque che valgono le proprietà:

(10) $\varphi_1(x) + \varphi_2(x) = \varphi(x) \cdot \psi_A(x) + \varphi(x) \cdot \psi_B(x) = \varphi(x) (\psi_A(x) + \psi_B(x)) \stackrel{\text{GRAZIE A (a)}}{=} \varphi(x) \cdot 1 = \varphi(x).$

(11) $\varphi_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ e $\text{supp } \varphi_1 \subset A$. GRAZIE A (b)

(12) $\varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ e $\text{supp } \varphi_2 \subset B$. GRAZIE A (c)

A questo punto, da (11) e dal fatto che T si annulla in A segue che $T(\varphi_1) = 0$ e, analogamente, da (12) e dal fatto che T si annulla in B segue che $T(\varphi_2) = 0$.

Ma allora:

$$T(\varphi) \stackrel{\text{GRAZIE A (10)}}{=} T(\varphi_1 + \varphi_2) = T(\varphi_1) + T(\varphi_2) = 0 + 0 = 0$$

Abbiamo quindi dimostrato che se $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ con $\text{supp } \varphi \subset A \cup B$ allora $T(\varphi) = 0$. Ciò significa che T si annulla in $A \cup B$.

0554 Per trattare il caso generale bisogna prima mostrare che quanto fatto per 2 intervalli aperti si può in realtà fare per n intervalli aperti $A_1, A_2, \dots, A_n$. Cioè che se $B = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ allora è possibile trovare $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n \in C^\infty(B)$ tali che:

a) $\psi_1(x) + \psi_2(x) + \dots + \psi_n(x) = 1 \quad \forall x \in B$

b) $\text{supp } \psi_i \subset A_i \quad \forall i = 1, \dots, n$.

Trovare tali ψ_i prende il nome di Partizione dell'Unità per gli $A_1, \dots, A_n$.

Come vedete cosa si fa vedere che $W = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ può essere scritto come:

$$W = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$$

dove $\mathcal{I}_I = \{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ è una famiglia numerabile di aperti in cui T si annulla. A questo punto, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ con $\text{supp } \varphi \subset W$ prendo $\{A_{i_1}, \dots, A_{i_n}\}$ una sottofamiglia finita di $\mathcal{I}_I$ tale che $\text{supp } \varphi \subset A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \dots \cup A_{i_n}$ (posso farlo perché $\text{supp } \varphi$ è compatto). A questo punto, ricorrendo ad una partizione dell'unità per gli $\{A_{i_1}, \dots, A_{i_n}\}$ si riesce a scrivere

$$\varphi(x) = \varphi_{i_1}(x) + \varphi_{i_2}(x) + \dots + \varphi_{i_n}(x)$$

dove per ogni $k = 1, \dots, n$ $\text{supp } \varphi_{i_k} \subset A_{i_k}$, dopodiché, sfruttando il fatto che T si annulla in ogni A_{i_k} si ottiene:

$$T(\varphi) = T(\varphi_{i_1} + \dots + \varphi_{i_n}) = T(\varphi_{i_1}) + \dots + T(\varphi_{i_n}) = 0 + \dots + 0 = 0.$$

FINE LEZIONE E INIZIO ESERCITAZIONE

Nell'esercitazione sono stati svolti i seguenti problemi

- 1) PROB. 3 del II° App. Sem. Autunnale A.A. 17/18, linkata come prova [6]
- 2) PROB. 3 del II° App. Sem. Estivo A.A. 17/18, linkata come prova [4]
- 3) PROB. 3 della prova simulata n. 3, linkata come [5113]

Altri volgarismi scritti di tali problemi si possono trovare nello stesso file .pdf in cui è contenuto il testo della prova.

Inoltre è stato svolto il seguente:

ES.4 Mostrare che l'applicazione $T: \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definito da

$$T(\varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R} - [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

è una distribuzione

SVOLGIMENTO Poiché φ è a supporto compatto, $\exists b > 0$ t.c. $\text{supp } \varphi \subset [-b, b]$, quindi può scrivere:

$$T(\varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R} - [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{[-b, b] - [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

A questo punto, poiché $\forall b > 0 \quad \forall \varepsilon > 0$, per motivi di simmetria si ha:

$$\int_{[-b, b] - [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{\varphi(x)}{x} dx = 0$$

possiamo scrivere:

$$(1) \quad T(\varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{[-b, b] - [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{[-b, b] - [-\varepsilon, \varepsilon]} F(x) dx = \int_{-b}^b F(x) dx$$

PERCHÉ $F(x)$ È CONTINUA

dove $F(x)$ è definita da

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ \varphi'(0) & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

ed è continua grazie al fatto che $\varphi \in C^1$.

Sì noti che (1) garantisce che $T(\varphi) \in \mathbb{R}$ per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. A questo punto

la linearità di T è ovvia e la continuità segue dal fatto che $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tale che $\text{supp } \varphi \subset [-b, b]$, sempre grazie a (1) si ha:

$$|T(\varphi)| \leq 2b \|F\|_{L^\infty([-b, b])} \leq 2b \|\varphi'\|_\infty \leq 2b \|\varphi\|_{\infty, 1}.$$