Metodi Matematici - Lez. 25

Titolo nota

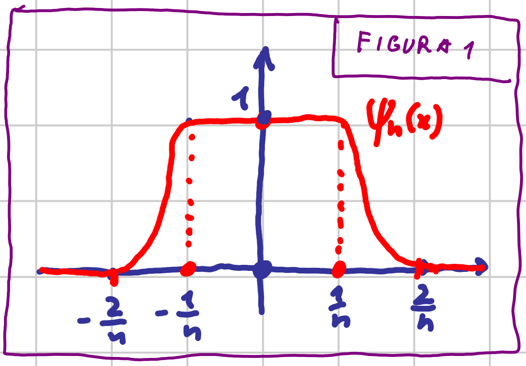
7 gennaio 2019 (14.00-15.45) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

DISTRIBUZIONI (... CONTINUA ...)

ES 1 Sia $T \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tale che $\operatorname{supp}(T) = \{0\}$ e $\operatorname{ordine}(T) = 0$.
Mostrare che esiste $c \in \mathbb{R}$ t.c. $T = c\,\delta_0$, dove δ_0 è la delta di Dirac.

La prima cosa da verificare è che $T(\varphi) = 0$ non solo se $\operatorname{supp}(\varphi) \subset \mathbb{R} - \{0\}$ ma, in generale per tutte le $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tali che $\varphi(0) = 0$.

Infatti, per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, prendiamo $\psi_n(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ come in figura 1, cioè tale che:



(1) $\quad 0 \le \psi_n(x) \le 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(2) $\quad \psi_n(x) = 1 \quad$ se $\; -\frac{1}{n} \le x \le \frac{1}{n}$

(3) $\quad \psi_n(x) = 0 \quad$ se $\; |x| \geq \frac{2}{n}$.

Presa ora $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ t.c. $\varphi(0) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$ si ha:

$$T(\varphi) = T\big(\psi_n(x)\cdot\varphi(x) + (1-\psi_n(x))\varphi(x)\big) =$$

$$= T\big(\psi_n(x)\varphi(x)\big) + \underbrace{T\big((1-\psi_n(x))\varphi(x)\big)} =$$

$$= T\big(\psi_n(x)\varphi(x)\big) + 0$$

PERCHÉ, $(1-\psi_n(x))\cdot\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ E, GRAZIE A **(2)**, IL SUPPORTO DI $(1-\psi_n(x))\cdot\varphi(x)$ È CONTENUTO IN $\mathbb{R} - \{0\}$

Ora, poiché T ha ordine 0, sappiamo che esiste una costante $A > 0$ tale che $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ con $\operatorname{supp} \varphi \subset [-2, 2]$ si ha $|T(\varphi)| \le C \|\varphi\|_\infty$.
In particolare, quindi, $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$ si ha:

$$|T(\varphi(x))| = |T(\psi_n(x)\varphi(x))| \le A\cdot\|\psi_n(x)\varphi(x)\|_\infty \le A \cdot \sup_{-\frac{2}{n} \le x \le \frac{2}{n}} |\varphi(x)| \to A\cdot|\varphi(0)| = 0$$

GRAZIE A **(1)** E **(3)**

PER $n \to +\infty$, PERCHÉ φ È CONTINUA IN 0

Quindi il valore di $|T(\varphi)|$ è non negativo ma minore di ogni numero strettamente positivo, cioè deve essere $|T(\varphi)| = 0$.
Questo dimostra che se $\varphi(0) = 0$ allora $T(\varphi) = 0$.
A questo punto, presa $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ t.c. $\varphi_0(0) = 1$ e posto $C = T(\varphi_0)$ vogliamo dimostrare per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ si ha $T(\varphi) = C \cdot \varphi(0)$.
Infatti, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ definiamo:

$$\psi(x) = \varphi(x) - \varphi(0) \cdot \varphi_0(x)$$

Si ha $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ e $\psi(0) = \varphi(0) - \varphi(0) \cdot \varphi_0(0) = \varphi(0) - \varphi(0) \cdot 1 = 0$, quindi:

$$0 = T(\psi) = T(\varphi(x) - \varphi(0)\varphi_0(x)) = T(\varphi) - \varphi(0) T(\varphi_0)$$

da cui segue:

$$T(\varphi) = \varphi(0) \cdot T(\varphi_0) = C \cdot \varphi(0)$$

Cioè $T = c\delta_0$.

DEF. 1 Data $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ definiamo $(gT) : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ nel modo seguente:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad (gT)(\varphi) = T(g\varphi)$$

OSS. 1 La **DEF. 1** è un'estensione del concetto di prodotto di funzioni nel seguente senso: se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, allora $g T_f = T_{gf}$, cioè il prodotto tra g e T_f coincide con la distribuzione associata alla funzione prodotto gf.
Infatti, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, si ha:

$$(g T_f)(\varphi) = T_f(g\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x) \varphi(x)\, dx = T_{gf}(\varphi)$$

OSS.2 La gT definita nella **DEF.1** è ben definita su tutto $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ed è ancora una distribuzione. Il fatto che sia ben definita e che sia lineare è ovvio. Mostriamo che è anche continua.

Grazie al teorema che da una caratterizzazione equivalente delle distribuzioni, basterà dimostrare che:

(4) $\forall K \subset \mathbb{R}$, compatto, $\exists A > 0 \; \exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ con supp $\varphi \subset K$ si ha: $|(gT)(\varphi)| \leq A \cdot \|\varphi\|_{\infty,n}$

sapendo che:

(5) $\forall K \subset \mathbb{R}$, compatto, $\exists C > 0 \; \exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ con supp $\varphi \subset K$ si ha: $|T(\varphi)| \leq C \cdot \|\varphi\|_{\infty,n}$

Per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ col supporto in K si ha:

GRAZIE A **(5)**, PERCHÉ supp$(g\varphi) \subset K$

(6)
$$|(gT)(\varphi)| = |T(g\varphi)| \leq C \cdot \|g\varphi\|_{\infty,n}$$

Per dimostrare (4) basterà far vedere che, se supp $\varphi \subset K$, allora

(7)
$$\exists B > 0 \text{ t.c. } \|g\varphi\|_{n,\infty} \leq B \cdot \|\varphi\|_{n,\infty} .$$

Per dimostrare (7) osserviamo che:

(8)
$$\begin{aligned}
\|g\varphi\|_{n,\infty} &= \|g\varphi\|_{\infty} + \|(g\varphi)'\|_{\infty} + \dots + \|(g\varphi)^{(n)}\|_{\infty} = \\
&= \|g\varphi\|_{\infty} + \|g'\varphi + g\varphi'\|_{\infty} + \dots + \Big\|\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} g^{(n-i)} \cdot \varphi^{(i)}\Big\|_{\infty} \leq \\
&\leq \|g\varphi\|_{\infty} + \|g'\varphi\|_{\infty} + \|g\varphi'\|_{\infty} + \dots + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \|g^{(n-i)}\varphi^{(i)}\|_{\infty} = \\
&\leq \sum_{\substack{i+j \leq n \\ i,j \in \mathbb{N}}} C_{ij} \, \|g^{(i)}\varphi^{(j)}\|_{\infty}
\end{aligned}$$

Ma per ciascuno dei termini $\|g^{(i)}\varphi^{(j)}\|_{\infty}$ vale la stima:

$$\|g^{(i)}\varphi^{(j)}\|_\infty = \|g^{(i)}\varphi^{(j)}\|_{L^\infty(K)} \leq \|g^{(i)}\|_{L^\infty(K)} \cdot \|\varphi^{(j)}\|_{L^\infty(K)} \leq$$

$$\leq \left(\|g\|_{L^\infty(K)} + \|g'\|_{L^\infty(K)} + \dots + \|g^{(n)}\|_{L^\infty(K)}\right) \cdot \|\varphi\|_{\infty,n}$$

e quindi la (8) diventa:

$$\|g\varphi\|_{\infty,n} \leq \dots \leq \left(\sum_{\substack{i+j\leq n\\ i,j\in\mathbb{N}}} C_{ij}\right) \cdot \left(\|g\|_{L^\infty(K)} + \|g'\|_{L^\infty(K)} + \dots + \|g^{(n)}\|_{L^\infty(K)}\right) \cdot \|\varphi\|_{\infty,n}$$

che ci fornisce la (7), dopo aver posto:

$$B = \left(\sum_{\substack{i+j\leq n\\ i,j\in\mathbb{N}}} C_{ij}\right) \cdot \left(\|g\|_{L^\infty(K)} + \|g'\|_{L^\infty(K)} + \dots + \|g^{(n)}\|_{L^\infty(K)}\right)$$

Una volta dimostrata la (7), la (6) diventa:

$$|(gT)(\varphi)| \leq \dots \leq C \cdot \|g\varphi\|_{\infty,n} \leq C \cdot B \cdot \|\varphi\|_{\infty,n}$$

che, dopo aver posto $A = C\cdot B$, ci fornisce la (4).

DEF. 2 Sia $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e $g(x) = ax+b$ con $a \neq 0$, definiamo $(T\circ g): \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ nel modo seguente:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad (T\circ g)(\varphi) = \frac{1}{|a|} \cdot T\left(\varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right)$$

OSS. 3 La definizione, apparentemente strana, di $T\circ g$, serve a rendere coerente tale definizione con la composizione di funzioni, nel caso in cui T sia la distribuzione associata ad una funzione in $L^1_{loc}(\mathbb{R})$.
Più precisamente, se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e $g(x) = ax+b$, con $a\neq 0$, vogliamo che sia $T_f \circ g = T_{f\circ g}$.

Osserviamo che, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, se $g(x) = ax+b$ con $a>0$ si ha:

$$(T_{f\circ g})(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(g(x))\cdot\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax+b)\cdot\varphi(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,\varphi\left(\frac{y-b}{a}\right)\cdot\frac{1}{a}\,dy = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)dx = \frac{1}{a}\,T_f\left(\varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right)$$

Se invece $a<0$, si ottiene:

$$(T_{f\circ g})(\varphi) = \cdots\cdots = \frac{1}{-a}\,T_f\left(\varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right)$$

Quindi in ogni caso si ha:

$$(T_{f\circ g})(\varphi) = \frac{1}{|a|}\,T_f\left(\varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right) = (T_f\circ g)(\varphi)$$

$\boxed{\text{OSS.4}}$ La $T\circ g$ definita nella $\boxed{\text{DEF.2}}$ è ben definita su tutto $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ed è ancora una distribuzione. Il fatto che sia ben definita e che sia lineare è ovvio. Per mostrare che è anche continua basta osservare che:

(9)
$$\left\|\varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right\|_{\infty,n} = \left\|\varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right\|_{\infty} + \left\|\frac{1}{a}\varphi'\left(\frac{x-b}{a}\right)\right\|_{\infty} + \cdots + \left\|\frac{1}{a^n}\varphi^{(n)}\left(\frac{x-b}{a}\right)\right\|_{\infty} \leq$$

$$\leq \max\left\{1, \frac{1}{|a^n|}\right\}\cdot\|\varphi\|_{\infty,n} = A\cdot\|\varphi\|_{\infty,n}$$

Grazie a tale disuguaglianza, dalla continuità di T segue quella di $T\circ g$. Infatti: $\forall K\subset\mathbb{R}$ compatto, $\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ con $\operatorname{supp}\varphi\subset K$, esistono $C>0$ e $n\in\mathbb{N}$ t.c.

$$\left|(T\circ g)(\varphi)\right| = \frac{1}{|a|}\left|T\left(\varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right)\right| \leq \frac{1}{|a|}\,C\cdot\left\|\varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right\|_{\infty,n} \leq \frac{1}{|a|}\cdot C\cdot A\cdot\|\varphi\|_{\infty,n}$$

PERCHÉ T È UNA DISTRIBUZIONE E IL SUPPORTO DI $\varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)$ È CONTENUTO IN $g^{-1}(K)$, CHE È COMPATTO

GRAZIE A (9)

$\boxed{\text{ES. 2}}$ $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e $g(x) = x - x_0$, cioè traslazione di T in avanti di x_0.

In tal caso, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, si ha:

$$(T \circ g)(\varphi) = T(\varphi(x+x_0))$$

il cui significato è: " T traslata di x_0 vale su φ, ciò che T vale su φ traslata di $-x_0$."

ES. 3 $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e $g(x) = -x$, cioè T simmetrizzata rispetto ad asse y.
In tal caso, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, si ha:

$$(T \circ g)(\varphi) = T(\varphi(-x))$$

il cui significato è il seguente: " la distribuzione simmetrica di T rispetto all'asse x vale su φ ciò che T vale sulla simmetrica di φ."

DEF. 3 Data $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ sia $g(x) = -x$. Diremo che:

$$T \text{ è pari} \iff T \circ g = T$$
$$T \text{ è dispari} \iff T \circ g = -T$$

DEF. 4 Data $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, diremo che φ è "rapidamente decrescente" se $\forall m \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N}\ \exists C > 0$ t.c.

$$\| x^m \varphi^{(k)}(x) \|_\infty \leq C$$

L'insieme di tutte le funzioni rapidamente decrescenti su $\mathbb{R}$ si indica con $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

OSS. 5 Data $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, dire che è "rapidamente decrescente" equivale a dire che, $\forall m \in \mathbb{N}$, per $x \to \pm\infty$ si ha $\varphi(x) = o\left(\frac{1}{x^m}\right)$.

DEF. 5 Data $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, successione in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ e data $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ diremo che $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R})} \varphi$ se $\forall m \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N}$ si ha:

$$\| x^m \varphi_n^{(k)} - x^m \varphi^{(k)} \|_\infty \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \to +\infty$$

OSS. 6 Si ha $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

L'inclusione è ovvia perché se φ è a supporto compatto, a maggior ragione sono $o\left(\frac{1}{x^n}\right)$ per $x \to \pm\infty$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Il controesempio banale per l'inclusione inversa è $\varphi(x) = e^{-x^2}$ che per $x \to \pm\infty$ è $o\left(\frac{1}{x^n}\right)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ma il cui supporto è tutto $\mathbb{R}$.

OSS. 7 Data $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ successione in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, essendo $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ possiamo considerarla anche una successione in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Si considerino le 2 affermazioni:

(a) $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} 0$

(b) $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R})} 0$

Allora $(a) \Rightarrow (b)$ ma $(b) \not\Rightarrow (a)$

Per mostrare che $(a) \Rightarrow (b)$ si osservi che se vale (a) allora esiste K compatto che contiene tutti i supporti delle φ_n, quindi $\exists\, b > 0$ tale che tutte le $\varphi_n(x)$ sono nulle fuori da $[-b, b]$. Ma allora, $\forall m \in \mathbb{N}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ si ha:

$$\| x^m \varphi_n^{(k)}(x) \|_\infty = \| x^m \varphi_n^{(k)}(x) \|_{L^\infty([-b,b])} \leq b^m \| \varphi_n^{(k)}(x) \|_\infty \longrightarrow 0$$

PER $n \to +\infty$, PERCHÉ SAPPIAMO CHE $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} 0$

Quindi $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R})} 0$, cioè vale (b).

Invece, per mostrare che $(b) \not\Rightarrow (a)$, basta esibire una successione (φ_n) t.c. $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R})} 0$ ma $\varphi_n \not\xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} 0$.

A tale scopo prendiamo come $\varphi(x)$ la solita funzione a campana con supporto $[-1, 1]$ e, per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ definiamo:

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{2^n} \varphi\left(\frac{x}{n}\right)$$

Si osservi che il supporto di φ_n è $[-n, n]$, perché il supporto di φ è $[-1,1]$.
Di conseguenza non c'è alcun compatto che possa contenere i supporti di tutte le φ_n e quindi la successione (φ_n) non può convergere in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.
Tuttavia $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R})} 0$ perché $\forall m \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}$ si ha:

$$\| x^m \varphi_n^{(k)}(x) \|_\infty = \| x^m \varphi_n^{(k)}(x) \|_{L^\infty([-n,n])} \leq n^m \| \varphi_n^{(k)} \|_{L^\infty([-n,n])} =$$

PERCHÉ $\varphi_n(x) = 0$ PER $|x| \geq n$

$$= n^m \cdot \| \varphi_n^{(k)} \|_\infty = n^m \cdot \left\| \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{n^k} \cdot \varphi^{(k)}\left(\frac{x}{n}\right) \right\|_\infty = \frac{n^{m-k}}{2^n} \cdot \| \varphi^{(k)} \|_\infty \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \to +\infty$$