

Metodi Matematici - Lez. 26-Exe

Titolo nota

8 gennaio 2019 (9.30-11.15, 11.30-12.15) - docente: Prof. E. Callegari - Università di Roma Tor Vergata

DISTRIBUZIONI TEMPERATE

DEF. 1 Data $T: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, diremo che T è una "distribuzione temperata" se è:

- a) lineare
- b) continua rispetto alla convergenza in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, cioè se per ogni successione (φ_n) in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, se $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R})} 0$ allora $T(\varphi_n) \rightarrow 0$.

L'insieme di tutte le distribuzioni temperate si indica con $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

OSS. 1 Si ha $\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Infatti come esempio di distribuzioni non temperate possiamo prendere T_f con $f(x) = e^x$. Chiaramente $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ perché $f(x) = e^x \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Tuttavia $T_f \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ perché esistono $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ nelle quali T_f non è definita. Ad esempio, se prendiamo $\varphi(x) = e^{-\sqrt{1+x^2}}$, si ha chiaramente $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ma:

$$T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^x \cdot e^{-\sqrt{1+x^2}} dx = +\infty$$

perché $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \cdot e^{-\sqrt{1+x^2}} = 1$ e quindi l'integrale diverge.

Invece $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \Rightarrow T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Infatti se $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ è sicuramente ben definita e lineare su tutto $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, visto che $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ è un sottospazio di $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Inoltre è anche continua nel senso di $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ perché se (φ_n) è una successione in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ tale che $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} 0$ sappiamo che, a maggior ragione si ha $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R})} 0$ e quindi, essendo $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$

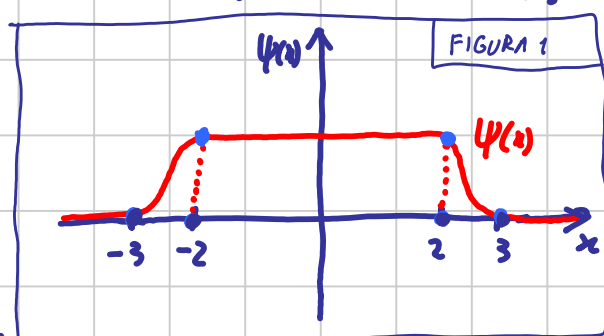
si ha $T(\psi_n) \rightarrow 0$.

OSS 2 Ci si potrebbe chiedere se l'esempio di distribuzione non temperata esibito nell'**OSS.1**, cioè T_f con $f(x) = e^x$, possa essere esteso agli elementi di $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ in cui non è definito in modo da diventare comunque continuo, rispetto alla convergenza in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

La risposta è NO, perché non è continuo rispetto alla convergenza di $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ nemmeno la sua sola restrizione a $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Prendiamo infatti $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N} - \{0\}}$ definite, per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, da:

(1)
$$\psi_n(x) = \frac{1}{2^n} \psi\left(\frac{x}{n}\right)$$

con $\psi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ avente grafico come in fig. 1



Procedendo in modo simile a quanto fatto nella

OSS. 7 della **LEZ. 25** si verifica che $\psi_n \xrightarrow{\mathcal{S}'(\mathbb{R})} 0$, tuttavia si ha:

$$T_f(\psi_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^x \psi_n(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{2^n} \psi\left(\frac{x}{n}\right) dx \geq \int_n^{2n} \frac{e^x}{2^n} \psi\left(\frac{x}{n}\right) dx =$$

PERCHÉ L'INTEGRANDA È POSITIVA

PERCHÉ SE $t \in [1, 2]$
SI HA $\psi(t) = 1$

$$= \int_n^{2n} \frac{e^x}{2^n} \cdot 1 dx > \int_n^{2n} 1 dx = n \rightarrow +\infty$$

PERCHÉ $x > n$

Quindi $T_f(\psi_n) \rightarrow +\infty$ anche se $\psi_n \xrightarrow{\mathcal{S}'(\mathbb{R})} 0$.

ES 1 $\delta_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Infatti, se $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}'(\mathbb{R})} 0$, in particolare $\|\varphi_n\|_\infty \rightarrow 0$ e quindi

$$|\delta_0(\varphi_n)| = |\varphi_n(0)| \leq \|\varphi_n\|_\infty \rightarrow 0$$

quindi $\delta_0(\varphi_n) \rightarrow 0$.

ES.2 Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ allora $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$

Ricordando sempre che da $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}'(\mathbb{R})} 0$ segue $\|\varphi_n\|_\infty \rightarrow 0$, si ha:

$$|T_f(\varphi_n)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi_n(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \cdot |\varphi_n(x)| dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \cdot \|\varphi_n\|_{\infty} dx = \\ = \|\varphi_n\|_{\infty} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = \|f\|_{L^1} \cdot \|\varphi_n\|_{\infty} \rightarrow 0$$

Quindi $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R})} 0$ allora $T_f(\varphi_n) \rightarrow 0$.

ES.3 Se $f \in L^{\infty}(\mathbb{R})$ allora $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Infatti, preso (φ_n) in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ tale che $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R})} 0$, si ha:

$$|T_f(\varphi_n)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi_n(x) dx \right| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^2} \cdot (1+x^2) \varphi_n(x) dx \right| \leq \\ \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(x)|}{1+x^2} \cdot |(1+x^2) \varphi_n(x)| dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\|f\|_{\infty}}{1+x^2} \cdot (\|\varphi_n\|_{\infty} + \|x^2 \varphi_n\|_{\infty}) dx = \\ = \pi \cdot \|f\|_{\infty} \cdot (\|\varphi_n\|_{\infty} + \|x^2 \varphi_n\|_{\infty}) \xrightarrow{\text{PERCHÉ SE } \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R})} 0 \text{ ALLORA } \|x^m \varphi_n\|_{\infty} \rightarrow 0 \forall m \in \mathbb{N}} \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

Quindi $T_f(\varphi_n) \rightarrow 0$.

ES.4 Se $f(x)$ è un polinomio di grado m allora $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Infatti, $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R})} 0$ si ha:

$$|T_f(\varphi_n)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi_n(x) dx \right| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (1+x^2) f(x) \varphi_n(x) \cdot \frac{1}{1+x^2} dx \right| \leq \\ \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |(1+x^2) f(x) \varphi_n(x)| \cdot \frac{1}{1+x^2} dx \leq \|(1+x^2) f(x) \varphi_n(x)\|_{\infty} \cdot \pi \leq \\ \leq \sum_{i=0}^{m+2} C_i \|x^i \varphi_n\|_{\infty} \xrightarrow{\text{PERCHÉ SE } \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R})} 0 \text{ ALLORA } \|x^k \varphi_n\|_{\infty} \rightarrow 0 \text{ PER OGNI } k \in \mathbb{N}} \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

Quindi $T_f(\varphi_n) \rightarrow 0$.

TEO1 L'applicazione $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ è ben definita e continua.
 $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$

DIMO Che $\mathcal{F}$ sia ben definita è già noto dal **TEO5** della **LE3 21**.

Rimane da dimostrare la continuità, cioè che se $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R})} 0$ allora

anche $\hat{\varphi}_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R})} 0$.

A tale scopo basterà dimostrare che, per ogni $m, k \in \mathbb{N}$, vale una stima del tipo:

$$(2) \quad \|\lambda^m \cdot (\hat{\varphi}(\lambda))^{(k)}\|_{\infty} \leq C \cdot \sum_{\substack{p=0, \dots, k \\ q=0, \dots, m+2}} \|x^q \cdot \varphi^{(p)}\|_{\infty}$$

Per dimostrare (2) osserviamo che, $\forall m \in \mathbb{N}$ e $\forall k \in \mathbb{N}$ si ha:

$$|\lambda^k (\hat{\varphi}(\lambda))^{(m)}| = \left| \lambda^k \cdot \widehat{((-ix)^m \varphi(x))}(\lambda) \right| = \left| \lambda^k \int_{-\infty}^{+\infty} (-ix)^m \varphi(x) e^{-i\lambda x} dx \right| =$$

PER LA REGOLA SULLA
DERIVATA DELLA
TRASFORMATA DI FOURIER

$$= \left| i^k \int_{-\infty}^{+\infty} (-ix)^m \varphi(x) \cdot (-i\lambda)^k e^{-i\lambda x} dx \right| =$$

$$= \left| i^k \int_{-\infty}^{+\infty} (-ix)^m \varphi(x) (e^{-i\lambda x})^{(k)} dx \right| =$$

INTEGRANDO PER PARTI k VOLTE
E OSSERVANDO CHE IL TERMINE
DI "BORDO" CHE RISULTA INTEGRANDO
PER PARTI VALE SEMPRE 0
GRAZIE AL FATTO CHE $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$= \left| (-i)^k \int_{-\infty}^{+\infty} ((-ix)^m \varphi(x))^{(k)} e^{-i\lambda x} dx \right| \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |((-ix)^m \varphi(x))^{(k)}| dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |(1+x^2) \cdot ((-ix)^m \varphi(x))^{(k)}| \cdot \frac{1}{1+x^2} dx \leq$$

$$\leq \pi \cdot \|(1+x^2) \cdot ((-ix)^m \varphi(x))^{(k)}\|_{\infty} =$$

PRENDENDO
 $C = \max_{p,q} (\pi C_{p,q})$

$$= \pi \cdot \left\| \sum_{\substack{p=0, \dots, k \\ q=0, \dots, m+2}} C_{p,q} \cdot x^q \cdot \varphi^{(p)}(x) \right\|_{\infty} \leq C \sum_{\substack{p=0, \dots, k \\ q=0, \dots, m+2}} \|x^q \cdot \varphi^{(p)}\|_{\infty}$$

Abbiamo quindi dimostrato che $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $\exists C > 0$ t.c.

$$|\lambda^k (\hat{\varphi}(\lambda))^{(m)}| \leq C \sum_{\substack{p=0, \dots, k \\ q=0, \dots, m+2}} \|x^q \cdot \varphi^{(p)}\|_{\infty}$$

Per ottenere la (2) basta passare al sup per $\lambda \in \mathbb{R}$.

A questo punto, usando la (2) è facile mostrare che se $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R})} 0$ allora anche $\hat{\varphi}_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R})} 0$. Infatti $\forall k, m \in \mathbb{N}$ e $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha

$$(3) \quad \left\| \lambda^k (\hat{\varphi}_n(\lambda))^m \right\| \leq C \sum_{\substack{p=0, \dots, k \\ q=0, \dots, m+2}} \left\| x^q \varphi_n^{(p)} \right\|_{\infty} \xrightarrow{\text{GRAZIE AL FATTO CHE } \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R})} 0} 0 \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

Dire che vale (3) $\forall k \in \mathbb{N}$ e $\forall m \in \mathbb{N}$ significa appunto dire che $\hat{\varphi}_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R})} 0$.

Oss. 3 Siamo ora pronti per definire la trasformata di Fourier di una distribuzione temperata, ma vogliamo farlo in modo che sia compatibile con la definizione già data in $L^1(\mathbb{R})$. Vogliamo cioè dare in modo che, se $f \in L^1(\mathbb{R})$, si abbia $\hat{T}_f = T_{\hat{f}}$. A tale scopo osserviamo che se $f \in L^1(\mathbb{R})$ allora $\hat{f}$ è continua e infinitesima quindi $T_{\hat{f}}$ è una distribuzione temperata e $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ si ha:

$$\begin{aligned} T_{\hat{f}}(\varphi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-ixy} dy \right) \varphi(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \varphi(x) e^{-ixy} dx \right) dy \quad \text{PER I TEOREMI DI FUBINI E TONELLI} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \varphi(x) e^{-ixy} dx \right) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-ixy} dx \right) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \hat{\varphi}(y) dy = T_f(\hat{\varphi}) \end{aligned}$$

Cioè, si ha $T_{\hat{f}}(\varphi) = T_f(\hat{\varphi})$.

NOTA 1 Nel **TEO. 1** e nell' **OSS. 3**, ricorriamo a che fare con la trasformata di Fourier, siamo obbligati a lavorare con funzioni a valori in $\mathbb{C}$, invece che in $\mathbb{R}$. Ad esempio si ha:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{ \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \varphi \text{ è rapidamente decrescente} \}$$

e

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}) = \{ T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C} \mid T \text{ è lineare e continua} \}$$

In particolare si tratta di spazi vettoriali su $\mathbb{C}$.

Questo comunque non ci causa problemi e tutta la teoria sviluppata rimane valida.

DEF.2 Data $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ definiamo $\hat{T}: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ come quell'applicazione tale che $\hat{T}(\varphi) = T(\hat{\varphi})$ per ogni $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

OSS.4 La $\hat{T}$ definita da **DEF.2** è definita per ogni φ , in quanto se $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ anche $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e quindi $T(\hat{\varphi})$ è ben definito. Inoltre $\hat{T}$ è una distribuzione temperata. La linearità di $\hat{T}$ è ovvia, mostriamo la continuità.

Dobbiamo verificare che se $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R})} 0$ allora $\hat{T}(\varphi_n) \rightarrow 0$. Si ha:

$$\hat{T}(\varphi_n) = T(\hat{\varphi}_n) \rightarrow 0$$

PERCHÉ SE $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R})} 0$ ALLORA ANCHE $\hat{\varphi}_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R})} 0$ E QUINDI $T(\hat{\varphi}_n) \rightarrow 0$ PERCHÉ T È UNA DISTRIBUZIONE TEMPERATA

ES.5 Trovare $\hat{\delta}_0$. $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ si ha:

$$\hat{\delta}_0(\varphi) = \delta_0(\hat{\varphi}) = \hat{\varphi}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-i0x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot \varphi(x) dx = T_1(\varphi)$$

INTERMEZZO: TRASFORMATA DI FOURIER IN $L^2(\mathbb{R})$

TEO.2 (Plancherel) Data $f \in L^2(\mathbb{R})$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo $f_n(x) = f(x) \cdot \chi_{[-n,n]}(x)$. Allora $\exists g \in L^2(\mathbb{R})$ t.c. $\hat{f}_n \xrightarrow{L^2} g$ e si ha $\|g\|_2^2 = \pi \|f\|_2^2$.
Se poi $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ allora $g = \hat{f}$.

DEF.3 Data $f \in L^2(\mathbb{R})$ definiamo trasformata di Fourier di f quella funzione $g \in L^2(\mathbb{R})$, data dal T. di Plancherel, alla quale converge in L^2 la successione $\hat{f}_n$, con $f_n = f \cdot \chi_{[-n,n]}$.

OSS.5 Il T. di Plancherel garantisce che la **DEF.3** è coerente con quella già data in $L^1(\mathbb{R})$.

FINE LEZIONE E INIZIO ESERCITAZIONE

Nell'esercitazione sono stati svolti i seguenti problemi:

- 1) PROB.2 del II° App. Settim. Estiva A.A. 14/15, link alla prova [4]
- 2) PROB.2 del I° App. Settim. Autunnale A.A. 14/15, link alla prova [5]

Gli svolgimenti scritti di tali problemi si possono trovare nello stesso file .pdf in cui è contenuto il testo delle prove.

Inoltre sono stati svolti i problemi:

- 3) Date $f(x) = x^3$.
 - a) Trovare il polinomio $p_2(x)$ di grado ≤ 2 che meglio approssima $f(x)$ in $L^2((-1,1))$.
 - b) Trovare $g(x) \neq f(x)$ tale che il polinomio di grado ≤ 2 che meglio la approssima in $L^2((-1,1))$ è ancora lo stesso $p_2(x)$.
 - c) Come (b) ma richiedendo anche che $g(x)$ sia un polinomio di grado 5.
- 4) Date $f(x) = \chi_{[-1,3]}^{(x)}$ e $g(x) = \chi_{[-1,0]}^{(x)}$, trovare la trasformata di Fourier di $f * g$.
- 5) Per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$ definiamo $T_n(\varphi) = n^2 \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi(x) - \varphi(-x) dx$.
 - a) Mostrare che, per ogni n , $T_n \in \mathcal{D}'$.
 - b) Trovare ordine e supporto di T_n , motivando la risposta.
 - c) Trovare, se esiste, $T \in \mathcal{D}'$ tale che $T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T$, motivando la risposta.

SOL. DI 3 Per il punto (a) si tratta di proiettare x^3 su $\text{Span}\{1, x, x^2\}$

cioè su $\text{Span}\{1, x^2\} \oplus \text{Span}\{x\}$, che sono perpendicolari tra loro.

Siccome x^3 è di grado 3 la sua proiezione su $\text{Span}\{1, x^2\}$ è 0, quindi basta trovare quella su $\text{Span}\{x\}$, che è:

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad \int_{-1}^1 x^3 \cdot x dx = \frac{2}{5}$$

$$h(x) = \frac{\langle x^3, x \rangle}{\|x\|_2^2} \cdot x = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{2} x = \frac{3}{5} x$$

Quindi $p_0(x) = \frac{3}{5} x$.

Per il punto (b) la scelta più ovvia è prendere $g(x) = p_0(x) = \frac{3}{5} x$.

Infine, per il punto (c) cerchiamo α in modo che la proiezione di αx^5 sia $\frac{3}{5} x$. La proiezione di αx^5 è:

$$k(x) = \frac{\langle \alpha x^5, x \rangle}{\|x\|_2^2} \cdot x = \alpha \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{2} x = \frac{3\alpha}{5} x$$

Basterà quindi scegliere $\alpha = \frac{7}{5}$ e si avrà

$$K(x) = \frac{7}{5} \cdot \frac{3}{2} \cdot x = \frac{3}{5} x.$$

SOL. DI 4 Si ha $\hat{\chi}_{[-1,1]}(\lambda) = \frac{2 \sin \lambda}{\lambda}$.

Invece:

$$\chi_{[1,3]}(x) = \chi_{[-1,1]}(x-2)$$

e quindi:

$$\hat{\chi}_{[1,3]}(\lambda) = e^{-2i\lambda} \hat{\chi}_{[-1,1]}(\lambda) = e^{-2i\lambda} \cdot \frac{2 \sin \lambda}{\lambda}$$

Quindi

$$(\chi_{[-1,1]} * \chi_{[1,3]})(\lambda) = \hat{\chi}_{[-1,1]}(\lambda) \cdot \hat{\chi}_{[1,3]}(\lambda) = e^{-i\lambda} \frac{4 \sin^2 \lambda}{\lambda^2}.$$

SOL. DI 5 Per il punto (a) basta riscrivere T_n nel modo seguente:

$$\begin{aligned} T_n(\varphi) &= n^2 \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \varphi(x) - \varphi(-x) dx = n^2 \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \varphi(x) dx - n^2 \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \varphi(-x) dx = \\ &= n^2 \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \varphi(x) dx + n^2 \int_{\frac{1}{n}}^{-\frac{2}{n}} \varphi(t) dt = \end{aligned}$$

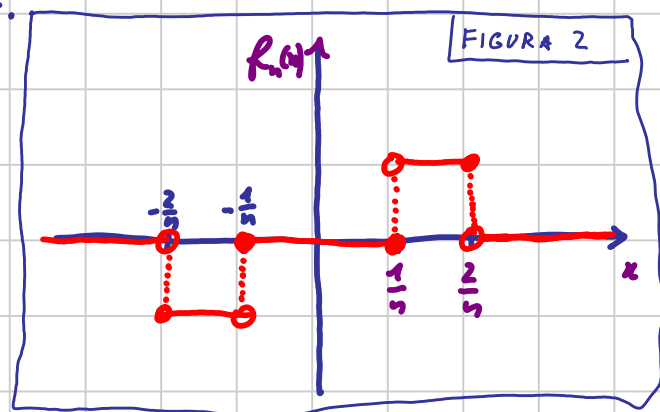
$$\begin{aligned}
&= n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{\left[-\frac{1}{n}, \frac{3}{n}\right]}(x) \varphi(x) dx - n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{\left[-\frac{2}{n}, \frac{4}{n}\right]}(x) \varphi(x) dx = \\
&= n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\chi_{\left[-\frac{1}{n}, \frac{3}{n}\right]}(x) - \chi_{\left[-\frac{2}{n}, \frac{4}{n}\right]}(x) \right) \varphi(x) dx
\end{aligned}$$

Quindi, per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $T_n(\varphi)$ è della forma $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) \varphi(x) dx$ con $f \in L^1$,

quindi T_n è una distribuzione di ordine zero.

Per trovare il supporto si osservi che la funzione $\chi_{\left[-\frac{1}{n}, \frac{3}{n}\right]}(x) - \chi_{\left[-\frac{2}{n}, \frac{4}{n}\right]}(x)$ ha il grafico

representato in figura 2, quindi si riesce a dimostrare nel solito modo che il supporto di T_n è $\left[-\frac{2}{n}, -\frac{1}{n}\right] \cup \left[\frac{1}{n}, \frac{3}{n}\right]$.



Questo completa il punto (b).

Infine per il punto (c) conviene osservare che, grazie al T. del resto di Lagrange per il polinomio di Taylor, esiste η tra 0 e x tale che

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0) \cdot x + \varphi''(\eta) \cdot \frac{x^2}{2}$$

ed esiste ξ tra 0 e $-x$ tale che

$$\varphi(-x) = \varphi(0) - \varphi'(0) \cdot x + \varphi''(\xi) \cdot \frac{x^2}{2}$$

quindi:

$$\begin{aligned}
T_n(\varphi) &= n^2 \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{3}{n}} (\varphi(x) - \varphi(-x)) dx = n^2 \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{3}{n}} \left(\varphi'(0) \cdot 2x + \frac{\varphi''(\eta) - \varphi''(\xi)}{2} x^2 \right) dx = \\
&= n^2 \varphi'(0) \left[x^2 \right]_{-\frac{1}{n}}^{\frac{3}{n}} + n^2 \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{3}{n}} \frac{\varphi''(\eta) - \varphi''(\xi)}{2} x^2 dx = \\
&= 3 \varphi'(0) + n^2 \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{3}{n}} \frac{\varphi''(\eta) - \varphi''(\xi)}{2} x^2 dx
\end{aligned}$$

$$M_n: \left| n^2 \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{3}{n}} \frac{\varphi''(\eta) - \varphi''(\xi)}{2} x^2 dx \right| \leq n^2 \|\varphi''\|_{\infty} \cdot \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{3}{n}} x^2 dx = \|\varphi''\|_{\infty} \cdot \frac{3}{n} \rightarrow 0$$

Quindi $T_n(\varphi) \rightarrow 3\varphi'(0)$. Ciò significa che $T_n \xrightarrow{D'} T$ dove $T: \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$
 $\varphi \mapsto 3\varphi'(0)$.