

COMBINATORIA LIVELLO ZERO

ESERCIZI

PRIMA PARTE: problemi quasi identici a quelli svolti a lezione

- 1) Dire quanti sono gli anagrammi, anche senza senso, delle seguenti parole: LATO, SECANTI, PALLA, MATEMATICA.
 $4! = 24$, $7! = 5040$, $\frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = 30$, $\frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 151200$
- 2) Una pulce si trova nelle caselle in basso a sinistra di una scacchiera standard per il gioco degli scacchi (8×8) e deve andare fino alla casella diagonalmente opposta, effettuando 14 salti tra caselle contigue (cioè aventi un lato in comune). Quanti sono i diversi percorsi che può fare? $\frac{14!}{7! \cdot 7!} = 3432$
- 3) Sul piano sono segnati 20 punti, a 3 a 3 non allineati. Quanti diversi triangoli può disegnare in modo che abbiano i vertici in 3 di tali punti. $\binom{20}{3} = 1140$
- 4) Il prede della scuola ****, avendo terminato i fondi per la didattica, invece di pagare i suoi 12 insegnanti per le attività extracurricolari, ha deciso di "gratificarli" distribuendo loro delle caramelle. Purtroppo ha solo 8 caramelle e quindi decide di darne non più di una a testa. In quanti modi diversi può distribuire le caramelle? $\binom{12}{8} = 495$
- 5) In un pollaio ci sono 100 galline rosse, 100 bianche e 100 nere. Una notte arriva una volpe e ne divora 5 a caso (senza badare al colore). Quante possibili situazioni diverse possono presentarsi il mattino dopo? (N.B. galline dello stesso colore sono indistinguibili) $\binom{7}{5} = 21$

6) In una riserva ci sono 100 fagiani, 100 cervi e 100 cinghiali. Un bracconiere, con un fucile e 6 colpi entra di nascosto e spara tutti i 6 colpi nel tentativo di colpire qualche animale (ma non è detto che riesca sempre a far centro). Quante diverse situazioni potrà trovare il guardiacaccia quando il bracconiere se ne sarà andato? (N.B. dal punto di vista del guardiacaccia animali dello stesso tipo sono indistinguibili) $\binom{9}{3} = 84$

7) Calcolare, nel modo più rapido possibile, l'espressione:

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \dots + \binom{99}{2} + \binom{100}{2} \quad \binom{101}{3} = 166650$$

[SUGGERIMENTO: tra i molti modi possibili di affrontare questo problema si consiglia di adottare quello utilizzato nella lezione, osservare cioè che l'espressione da calcolare rappresenta il numero di modi di distribuire al più 98 caramelle a 3 bimbi, quindi]

SECONDA PARTE: altri problemi.

8) Quanti sono gli anagrammi della parola MATEMATICA che iniziano e finiscono per A. $\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 10080$

9) Tra tutti gli anagrammi della parola DISTANZE, quanti sono quelli che, cancellandone le ultime 4 lettere, presentano le altre 4 in ordine alfabetico? $\binom{8}{4} \cdot 4! = 1680$

10) Alla finale dei 100 dorso partecipano 8 atleti. In quanti modi diversi possono essere assegnate le medaglie per i primi 3 posti? (si suppone che non ci siano situazioni di parità). $\binom{8}{3} \cdot 3! = 336$

- 11) In quanti modi posso distribuire 10 caramelle a 4 bimbi in modo che ciascuno ne riceva almeno una? $\binom{9}{3} = 84$
- 12) Tra gli anagrammi della parola **DANNATA**, quanti sono quelli che iniziano per consonante? Di questi, quanti sono quelli che anche terminano per consonante?
 iniziano per cons.: $\frac{7!}{3! \cdot 2!} - \frac{6!}{2! \cdot 2!} = 240$
 iniziano + finiscono per cons.: $\frac{7!}{3! \cdot 2!} - 2 \cdot \frac{6!}{2! \cdot 2!} + \frac{5!}{2!} = 120$
- 13) Sia $P(x, y)$ un polinomio omogeneo di grado 10 nelle variabili x e y (omogeneo significa che tutti i suoi termini hanno lo stesso grado). Supponiamo inoltre che $P(x, y)$ sia già in forma normale, cioè che eventuali termini simili siano già stati sommati tra loro. Quanti termini può avere $P(x, y)$ al massimo? Quanti sono i termini se invece $P(x, y)$ non è omogeneo?
 omogeneo: 11
 non omogeneo: $\binom{12}{2} = 66$
- 14) Come il problema (13) ma sostituendo (x, y) con un polinomio $P(x, y, z, w)$ di 4 variabili.
 omogeneo: $\binom{13}{3} = 286$
 non omogeneo: $\binom{14}{4} = 1001$
- 15) Quanti sono gli anagrammi della parola **MATEMATICA** tali che, cancellandone tutte le consonanti, le lettere restanti si presentano in ordine alfabetico? $\binom{10}{5} \frac{5!}{2! \cdot 1!} = 7560$
- 16) Quanti sono gli anagrammi della parola **AMMAZZATO** in cui non ci sono mai due vocali vicine? $\frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot \frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = 1800$
- 17) La famiglia Rossi è composta da mamma, papà e 5 figli: Claudia, Luca e i 3 gemellini Andrea, Mirco e Davide. Quando vanno al cinema si vedono tutti in fila occupando 7 posti consecutivi, ma avendo cura che due gemelli non siano

mai ridotti vicini (altrimenti forebbero corino). In quanti modi diversi possono vedersi? $\frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 4! \cdot 3! = 1440$

18) Quante sono le funzioni crescenti (contando anche quelle che sono solo debolmente crescenti) da $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. [le definizioni di funzione strettamente e debolmente crescente sono spiegate nella II parte della lezione 1] $\binom{11}{5} = 462$

19) Come il problema (2), ma con "16 salti" invece che "14 salti". $2 \cdot 4 \cdot \frac{16!}{9! \cdot 7!} = 160160$

20) E se nel problema (2) i salti fossero stati 17 cosa sarebbe successo? [non c'è alcun percorso lungo un numero dispari di salti che porta e arriva nelle caselle indicate (pensare al colore delle caselle)]