

L'ARTE DI SOMMARE ESERCIZI

PRIMA PARTE: problemi quasi identici a quelli svolti a lezione

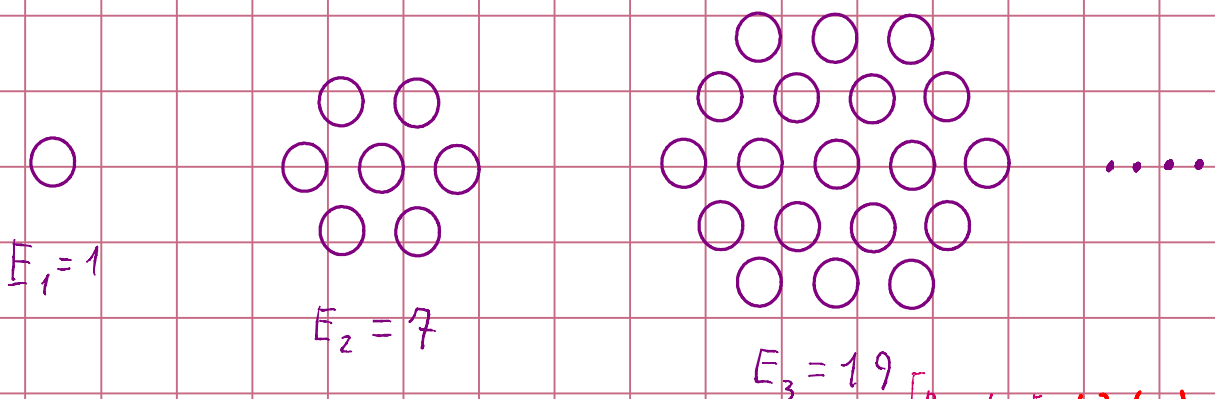
1) Calcolare $101+102+103+\dots+199+200$. [Risposta: $\frac{101+200}{2} \cdot 100 = 15050$]

2) Calcolare $1+3+5+7+9+\dots+195+197+199$. [Risposta: $\frac{1+199}{2} \cdot 100 = 10000$]

3) Trovare la formula per calcolare la somma dei primi n numeri dispari. [Risposta: n^2]

4) Calcolare la somma dei primi 100 multipli di 3. [Risposta: $3 \cdot \frac{100 \cdot 101}{2} = 15150$]

5) Si immagini di definire i numeri "esagonali" E_n nel modo seguente



Quanto vale E_{100} ? E in generale E_n ?

[Risposta: $E_n = 1 + 3n(n-1)$
 $E_{100} = 1 + 3 \cdot 99 \cdot 100 = 29701$]

6) Calcolare $2^2+4^2+6^2+8^2+\dots+198^2+200^2$ [Risposta: $4 \cdot \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} = 1353400$]

7) Calcolare $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + \dots + 99 \cdot 100 + 100 \cdot 101$ [Risposta: $2 \cdot (T_1 + T_2 + \dots + T_{100}) = 2 \cdot \binom{102}{3} = 343400$]

- 8) Utilizzando, tra quelli visti a lezione, il metodo che si ritiene più opportuno, trovare la formula per calcolare:
 $1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + (n-1)^4 + n^4$. [Risposta: $\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$]

SECONDA PARTE: altri problemi.

- 9) Calcolare la somma dei primi 100 numeri esagonali (per la definizione di numero esagonale si veda il problema 5) [Risposta: $100 + 6 \binom{101}{3} = 100^3 = 1000000$]
- 10) Su una tabella infinita mettiamo il numero 1 in una casella qualsiasi, poi continuiamo a mettere tutti i numeri interi che seguono, giraleggiando nel modo indicato in figura. Qual è la somma dei primi 100 numeri cerchiati in rosso? [Risposta: $1 + \frac{198 \cdot 199 \cdot 395}{6} - 4 \cdot \frac{98 \cdot 99 \cdot 197}{6} + \frac{99 \cdot 100}{2} = 1298650$]
- | | | | | | |
|----|----|----|----|-----|----|
| | | | | ... | |
| | | | | ... | |
| 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | : |
| 18 | 5 | 4 | 3 | 12 | 29 |
| 19 | 6 | 1 | 2 | 11 | 28 |
| 20 | 7 | 8 | 9 | 10 | 27 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
- 11) Calcolare la somma delle aree di tutti i diversi rettangoli che hanno perimetro di 400 cm ed aventi i lati che, in centimetri, hanno misura intera. [Risposta: $\frac{1}{2} \left(\binom{201}{3} + 100^2 \right) = 671650$]
- 12) Luca vuole costruire una piramide a gradoni usando dei cubetti di legno al lato di 1 cm: ogni "gradone" della piramide è uno strato quadrato di cubetti ed ha il lato che misura di 2 centimetri il lato del "gradone" su cui poggia. Se dispone di 10000 cubetti, qual è la massima altezza della piramide che può costruire? [Risposta: 19]

- 13) Sia $p(n) = n^3 + 3n^2 + 2n + 2014$, calcolare $p(1) + p(2) + p(3) + \dots + p(100)$.
 [Risposta: $6 \cdot \binom{103}{4} + 2014 \cdot 100 = 27249200$]
- 14) Sia $p(n) = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$, calcolare $p(1) + p(2) + p(3) + \dots + p(100)$.
 [Risposta: $5! \cdot \binom{105}{6} = 193121292000$]
- 15) Sia $p(n) = n^7 - 14n^5 + 49n^3 - 36n$, calcolare $p(1) + p(2) + p(3) + \dots + p(100)$.
 [Risposta: $\binom{104}{8} \cdot 7! = 1298180636953200$]
- 16) Sia $p(n) = n(n+1)$, calcolare $\frac{1}{p(1)} + \frac{1}{p(2)} + \frac{1}{p(3)} + \dots + \frac{1}{p(100)}$ [Risposta: $\frac{100}{101}$]
- 17) Indicato con T_n l' n -esimo numero triangolare, calcolare:
 $T_1 \cdot T_{100} + T_2 \cdot T_{99} + T_3 \cdot T_{98} + \dots + T_{99} \cdot T_2 + T_{100} \cdot T_1$.
 [Risposta: $\binom{104}{5} = 91962520$]

NOTA: I problemi 16 e 17 si risolvono utilizzando trucchi che NON sono stati mostrati in questa lezione. Sono stati inseriti al solo scopo di "stuzzicare" chi segue il corso in vista di una lezione successiva.