

ARITMETICA ZERO - ESERCIZI

PRIMA PARTE: problemi quasi identici a quelli svolti a lezione

Scomporre in fattori (usando eventualmente qualche trucco) i seguenti numeri:

$$1) 1002001 = (1001)^2 = 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2$$

$$2) 10609000 = 1000 \cdot 103^2 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 103^2$$

$$3) 21218 = 2 \cdot 103^2$$

$$4) 999999000 = 9000 \cdot 111 \cdot 1001 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$$

Dire quanti sono i divisori dei seguenti numeri:

$$5) 360 \cdot 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$$

$$d(360 \cdot 360) = 192$$

$$6) 60^{60} = 2^{120} \cdot 3^{60} \cdot 5^{60}$$

$$d(60^{60}) = 121 \cdot 61 \cdot 61 = 450241$$

Calcolare la somma dei divisori di

$$7) 729 = 3^6$$

$$s(729) = \frac{3^7 - 1}{3 - 1} = 1093$$

$$8) 100'000 = 2^5 \cdot 5^5$$

$$s(100000) = \frac{2^6 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{5^6 - 1}{5 - 1} = 246078$$

$$9) 210^3 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^3$$

$$s(210^3) = \frac{2^4 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{3^4 - 1}{3 - 1} \cdot \frac{5^4 - 1}{5 - 1} \cdot \frac{7^4 - 1}{7 - 1} = 37440000$$

$$10) 32064032000 = 2^8 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2$$

$$s(n) = \frac{2^9 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{5^4 - 1}{5 - 1} \cdot \frac{7^3 - 1}{7 - 1} \cdot \frac{11^3 - 1}{11 - 1} \cdot \frac{13^3 - 1}{13 - 1} = 110591840268$$

Calcolare il prodotto dei divisori di

$$11) 128 = 2^7$$

$$d(128) = 8$$

$$\text{Prodotto divisori} = 128^{\frac{8}{2}} = 2^{28}$$

$$12) 4000 = 2^5 \cdot 5^3$$

$$d(4000) = 24$$

$$\text{Prodotto divisori} = 4000^{\frac{24}{2}} = 2^{24} \cdot 10^{36}$$

$$13) 210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

$$d(210) = 16$$

$$\text{Prodotto divisori} = 210^{\frac{16}{2}} = 2^{16} \cdot 10^{24}$$

$$14) 8100 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2$$

$$d(8100) = 45$$

$$\text{Prodotto divisori} = \left(\sqrt{8100}\right)^{45} = 9^{45} \cdot 10^{45}$$

Calcolare $MCD(a,b)$ e $m.c.m(a,b)$ nei seguenti casi:

15) $a=2001$ $b=1999$ $MCD=1$
 $m.c.m = a \cdot b = 3999999$

16) $a=22 \cdot 325$ $b=1000$ $MCD=25$
 $m.c.m = \frac{a \cdot b}{25} = 893000$

17) $a=1579'001$ $b=1579'129$
 $MCD=1$ $m.c.m = a \cdot b = 2493446270129$

18) $a=233$ $b=144$
 $MCD=1$
 $m.c.m = a \cdot b = 33552$

SECONDA PARTE: altri problemi.

19) Quanti sono i divisori dispari di $\overbrace{999999^3 - 856'856^3 - 143'143^3}^n$?
 $[n = (a+b)^3 - a^3 - b^3 = 3ab(a+b) = 3 \cdot 856'856 \cdot 143'143 \cdot 999999 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 7^3 \cdot 11^4 \cdot 13^4 \cdot 32 \cdot 107$
 numero divisori dispari = $5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 = 2000]$

20) Qual è il più grande intero positivo n tale che n^2 divide $\overbrace{123'246'124^2 - 123'246'122^2}^m$? (Gara a squadre di Roma Tor Vergata 2011)
 $[m = a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b) = 4 \cdot 123'246'123 = 4 \cdot 123 \cdot 1001001 = 4 \cdot 123 \cdot 1001^2 = 3 \cdot 41 \cdot 2002^2 \Rightarrow n = 2002]$

21) Siano $n = 111'333'222'666$ e $m = 111'333'333'111$.

Quanti sono i divisori di m che non dividono n ? (Gara a squadre di Roma Tor Vergata 2010)
 $[d(m) = 256, d(MCD(m,n)) = 4]$
 risposta: $256 - 4 = 252]$

22) Siano n e m numeri minori di 1000. Se si calcola $MCD(n,m)$ usando l'algoritmo di Euclide, qual è il massimo numero di passi che può durare ? (Ad esempio se $n=26$ e $m=17$ l'algoritmo dura 4 passi perché $MCD(26,17) = MCD(17,9) = MCD(9,8) = MCD(8,1) = MCD(1,0) = 1$)
 (Liberamente tratto dalla Gara per le Prime 2013)

[Risposta: 14 passi, che si ottengono da $n=987$ e $m=610$, che sono la coppia più grande di numeri di Fibonacci consecutivi minori di 1000]