

CONGRUENZE E CLASSI DI RESTO

PRIMA PARTE: problemi quasi identici a quelli svolti a lezione

1) Trovare tutti gli interi n tali che $3^n + 1$ è un quadrato perfetto. [Risposta: SOLO $n=1$]

2) Trovare tutti gli interi n tali che $5^n + 4$ è un quadrato perfetto. [Risposta: SOLO $n=1$]

Trovare le cifre delle unità dei seguenti numeri:

3) 2013^{2013} [Risposta: 3]

4) 2014^{2014} [Risposta: 6]

Trovare le cifre di unità e decine dei seguenti numeri:

5) 1951^{1951} [Risposta: 51]

6) 2007^{2007} [Risposta: 43]

7) Intuire e dimostrare una regola per testare la divisibilità per 101 di un numero scritto in base 10.

[Come la divisibilità per 11, ma raggruppando le cifre a coppie. Esempio: $[725875135884510]_{101} = [7+25+32+51+35+88+45+10]_{101} = [0]_{101}$]

8) Intuire e dimostrare una regola per testare la divisibilità per 3 di un numero scritto in binario.

[Come la divisibilità per 11, ma usando le cifre della rappresentazione binaria. Esempio: $[11010011111]_3 = [1-1+0-1+0-0+1-1+1-1+1]_3 = [0]_3$]

9) Trovare il più piccolo x intero positivo tale che
$$\begin{cases} x \equiv 29 \pmod{199} \\ x \equiv 54 \pmod{98} \end{cases}$$
 [Risposta: 2044]

SECONDA PARTE: altri problemi.

- 10) Dati 100 numeri interi $a_1, a_2, \dots, a_{100}$, non necessariamente distinti, mostrare che è sempre possibile sceglierne K (con $1 \leq K \leq 100$) tali che la loro somma sia divisibile per 100.

[Suggerimento: considerare $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots, S_{100} = a_1 + a_2 + \dots + a_{100}$. Se nessuno di essi è $\equiv 0 \pmod{100}$ allora ci sono $i \neq j$ tali che $S_i \equiv S_j \pmod{100}$, quindi ...]

- 11) Definiamo a_n per ricorrenza nel modo seguente:

$$\begin{cases} a_1 = 7 \\ a_{n+1} = 7^{a_n} \end{cases} \quad \text{per ogni } n = 1, 2, 3, \dots$$

qual è la cifra delle unità di a_{2014} ?

Risposta: **3**

Trovare, se ce ne sono, tutti gli x che soddisfanno le seguenti condizioni:

12) $3x \equiv 1 \pmod{5}$ [Risposta: $x = 2 + 5K$
con K intero]

13) $3x \equiv 1 \pmod{6}$ [Risposta: **NESSUNO**]

14) $3x \equiv 1 \pmod{2014}$ [Risposta: $x = 1343 + 2014K$
con K intero]

15) $3x \equiv 1 \pmod{2013}$ [Risposta: **NESSUNO**]

16) $\begin{cases} 5x \equiv 7 \pmod{11} \\ 14x \equiv 3 \pmod{19} \end{cases}$ [Risposta: $x = 140 + 209K$
con K intero]

17) $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{7} \\ x \equiv 3 \pmod{11} \\ x \equiv 2 \pmod{13} \end{cases}$

[Risposta: $x = 652 + 1001K$
con K intero]

- 18) Osservare che:

$$2x \equiv 4 \pmod{5} \Rightarrow x \equiv 2 \pmod{5}$$

mentre invece

$$2x \equiv 4 \pmod{6} \not\Rightarrow x \equiv 2 \pmod{6}$$

Dopo aver meditato su tali esempi si cerchi di dire per quali a ed m vale l'implicazione $ab \equiv ac \pmod{m} \Rightarrow b \equiv c \pmod{m}$.

[Risposta: l'implicazione vale se a ed m sono primi tra loro]