

CONGRUENZE E CLASSI DI RESTO

PRIMA PARTE: problemi quasi identici a quelli svolti a lezione

- 1) Trovare tutti gli interi n tali che $3^n + 1$ è un quadrato perfetto.
- 2) Trovare tutti gli interi n tali che $5^n + 4$ è un quadrato perfetto.

Trovare le cifre delle unità dei seguenti numeri:

3) 2013^{2013}

4) 2014^{2014}

Trovare le cifre di unità e decine dei seguenti numeri:

5) 1951^{1951}

6) 2007^{2007}

- 7) Intuire e dimostrare una regola per testare la divisibilità per 101 di un numero scritto in base 10.
- 8) Intuire e dimostrare una regola per testare la divisibilità per 3 di un numero scritto in binario.
- 9) Trovare il più piccolo x intero positivo tale che
$$\begin{cases} x \equiv 29 \pmod{199} \\ x \equiv 54 \pmod{98} \end{cases}$$

SECONDA PARTE: altri problemi.

10) Dati 100 numeri interi $a_1, a_2, \dots, a_{100}$, non necessariamente distinti, mostrare che è sempre possibile sceglierne K (con $1 \leq K \leq 100$) tali che la loro somma sia divisibile per 100.

11) Definiamo a_n per ricorrenza nel modo seguente:

$$\begin{cases} a_1 = 7 \\ a_{n+1} = 7^{a_n} \end{cases} \quad \text{per ogni } n = 1, 2, 3, \dots$$

qual è la cifra delle unità di a_{2014} ?

Trovare, se ce ne sono, tutti gli x che soddisfanno le seguenti condizioni:

12) $3x \equiv 1 \pmod{5}$

13) $3x \equiv 1 \pmod{6}$

14) $3x \equiv 1 \pmod{2014}$

15) $3x \equiv 1 \pmod{2013}$

16) $\begin{cases} 5x \equiv 7 \pmod{11} \\ 14x \equiv 3 \pmod{19} \end{cases}$

17) $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{7} \\ x \equiv 3 \pmod{11} \\ x \equiv 2 \pmod{13} \end{cases}$

18) Osservare che:

$$2x \equiv 4 \pmod{5} \Rightarrow x \equiv 2 \pmod{5}$$

mentre invece

$$2x \equiv 4 \pmod{6} \not\Rightarrow x \equiv 2 \pmod{6}$$

Dopo aver meditato su tali esempi si cerchi di dire per quali a ed m vale l'implicazione $ab \equiv ac \pmod{m} \Rightarrow b \equiv c \pmod{m}$.