

Roma, 12 Ottobre 2018
Stage Olimpico Urbi et Orbi

Modulo n.1 - gara a tema: Aritmetica Zero

Nota per l'insegnante.

Questa gara è la prima di 10 gare a tema che costituiscono lo stage Urbi et Orbi e si presenta divisa in due parti: la prima parte è costituita da problemi standard che servono a testare la preparazione dei neofiti, mentre la seconda, pur non richiedendo più nozioni della prima, richiede un po' di creatività in più. Nella lezione tenuta presso l'ateneo di **Roma Tor Vergata**, che ha preceduto la gara, sono state fornite le basi per risolvere i problemi della prima parte, mentre nella discussione post gara si discuterà dei problemi della seconda.

Per le scuole (o i distretti) che invece organizzano le lezioni **per conto proprio**, partecipando solo alle gare, la modalità di utilizzo della gara dipende dalla preparazione degli studenti: se sono principianti consiglio di far precedere la gara da una o più lezioni, se invece sono sufficientemente preparati si può partecipare direttamente alla gara.

Segnalatemi la vostra partecipazione in modo che possa eventualmente fornirvi il materiale che utilizzo per le lezioni, mandandomi una mail a: callegar@mat.uniroma2.it. Nella mail abbiate cura di inserire anche un numero di cellulare in modo che possa inserirvi nel gruppo whatsapp dello stage.

I parte: problemi standard

1. Trovare il MCD (200004, 49990).
2. Trovare il mcm (200004, 49990). (Dare come risposta le 4 cifre più basse del numero)
3. [Gara Prime 2016] Dati due numeri interi positivi m e n , sappiamo che $\text{MCD}(m, n) = 6$ e che $\text{mcm}(m, n) = 3150$. Quanto vale il prodotto $m \cdot n$? (Se il risultato ha più di 4 cifre dare come risposta le 4 cifre più basse)
4. Qual è il massimo valore di n per cui $n^2 + 20$ è divisibile per $n + 2$?
5. Dire quanti sono i divisori di 2008008.
6. Dire quanti sono i divisori dispari del quadrato di 1224.
7. [Gara Prime 2016] Sappiamo che un numero intero positivo n ha 6 divisori (contando tra i divisori anche 1 ed n). Quanti divisori può avere, al massimo, il suo quadrato?
8. [Gara Prime 2013] Sia n il prodotto di tutti gli interi positivi che dividono 576 (contando tra i divisori anche il numero stesso). Dire quanto vale $\sqrt[2]{n}$.
9. Calcolare la somma di tutti i divisori positivi di 2^{12} (contando tra i divisori anche 1 e il numero stesso).
10. Calcolare la somma di tutti i divisori positivi di 2304 (contando tra i divisori anche 1 e il numero stesso).
11. Dire quante sono le coppie di interi (x, y) , sia positivi che negativi, che soddisfano l'equazione

$$x^2 - y^2 = 72.$$

12. [Disfida Urbi et Orbi 2011] Quanti sono i numeri interi compresi tra 1 e 2011 che non sono esprimibili come differenza di due quadrati perfetti? (N.B. notare che anche 0 è un quadrato perfetto)

II parte: altri problemi

13. [Disfida Urbi et Orbi 2014] Di un numero intero n sappiamo che ha 4.324.320 divisori positivi (contando anche 1 ed n). Quanti sono, al massimo, i numeri primi che compaiono nella sua fattorizzazione?
14. [Gara Prime 2017] Sia $N = 16!$, cioè $N = 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Quanti sono i quadrati perfetti che dividono N ?
15. [Gara Prime 2017] Sono dati $n = 7575$ e $m = 7755$. In quanti modi posso scegliere l'intero positivo k in modo che $\text{MCD}(m, n) = \text{MCD}(m, n, k)$ e $\text{mcm}(m, n) = \text{mcm}(m, n, k)$?
16. [Disfida Urbi et Orbi 2016] Trovare il più piccolo tra i divisori di 9006000 che superano la sua radice quadrata.
17. Sia S la somma di tutti i divisori di 30^{11} (contando anche 1 e il numero stesso) e sia K il numero di divisori di S . Quanto vale $\frac{K}{10}$?
18. [Summer School Assisi 2018] Si considerino i numeri $a_n = 50 + n^2$, per n intero positivo. Quanto può valere al massimo $\text{MCD}(a_n, a_{n+1})$?

19. [Disfida Urbi et Orbi 2013] Quanti sono i divisori positivi di 8100^9 che sono minori di 90^9 ma che non dividono 90^9 ?

20. [Disfida Urbi et Orbi 2018] Determinare il più piccolo numero intero positivo tale che il prodotto di tutti i suoi divisori positivi è uguale a 72^{35} .

21. [Disfida Urbi et Orbi 2014] Di un numero intero n sappiamo che ha 99000 divisori positivi (contando anche 1 ed n) Quanti sono, al minimo, i quadrati che lo dividono? (contando anche 1)

22. [Gara Prime 2013] Per ogni coppia di interi strettamente positivi (a, b) , con $a \geq b$, definiamo la trasformazione T che agisce nel modo seguente:

$$T : (a, b) \mapsto (b, r)$$

dove r è il resto della divisione tra a e b . Definiamo ora ordine di una coppia (a, b) per la quale T sia definita, il numero di volte che bisogna applicargli T prima di ottenere una coppia col secondo elemento uguale a zero. Ad esempio la coppia $(300, 27)$ è di ordine 2 perché applicandogli due volte T si ottiene:

$$(300, 27) \mapsto (27, 3) \mapsto (3, 0)$$

mentre la coppia $(20, 11)$ è di ordine 4 perché

$$(20, 11) \mapsto (11, 9) \mapsto (9, 2) \mapsto (2, 1) \mapsto (1, 0)$$

Qual è il massimo ordine che può avere una coppia costituita da due numeri di al più 6 cifre?

23. [Disfida Urbi et Orbi 2018] Determinare il numero di coppie ordinate di interi positivi (x, y) tali che:

$$xy + 3 \cdot \text{mcm}(x, y) = 2018 + 6 \cdot \text{MCD}(x, y).$$

24. [Tor Vergata 2017] Due numeri interi positivi n e m soddisfano la relazione

$$\text{MCD}(m, n) + \text{mcm}(m, n) + m + n = 90.$$

Quanto vale, al massimo, il prodotto $m \cdot n$?

Caro Docente, caro Studente,

se vuoi aiutarci, puoi contribuire ad una miglior riuscita dello stage con le seguenti azioni:

- 1 (per i docenti) Segnarci **quanti studenti hanno partecipato** nella tua scuola.
- 2 (per i docenti) **Segnalare l'iniziativa** ai colleghi di altre scuole che ritieni possano essere interessati.
- 3 (per i docenti) **Linkare nel sito della tua scuola** la pagina web dello stage e del video-corso collegato.
- 4 (per tutti) **Iscriverti** al canale **YouTube** collegato.
- 5 (per tutti) Chiedere l'**amicizia** all'utente **Facebook** collegato.

Stage: <http://www.problemisvolti.it/StageOlimpiadiMatematica.html>

Video Corso: <http://www.problemisvolti.it/CorsoBaseOlimpiadiMatematica.html>

YouTube: [problemisvolti.it](http://www.problemisvolti.it)

Facebook: [Problemisvolti Puntoit](https://www.facebook.com/ProblemisvoltiPuntoit)