Roma, 26 Ottobre 2018

Stage Olimpico Urbi et Orbi

Modulo n.2 - gara a tema: **Combinatoria Zero**

(conteggi standard e principio dei cassetti)

Nota per l'insegnante. Questa gara è la seconda di 10 gare a tema che costituiscono lo stage Urbi et Orbi ed è, come al solito, divisa in due parti: la prima parte è costituita da problemi standard che servono a testare la preparazione dei neofiti, mentre la seconda, pur non richiedendo più nozioni della prima, richiede un po' di creatività in più. Nella lezione tenuta presso l'ateneo di **Tor Vergata**, che ha preceduto la gara e che si può scaricare dalla pagina web dello stage, sono state fornite le basi per risolvere i problemi della prima parte, mentre nella discussione post gara si discuterà dei problemi della seconda.

Per le scuole (o i distretti) che invece organizzanno le lezioni **per conto proprio**, partecipando solo alle gare, la modalità di utilizzo della gara dipende dalla preparazione degli studenti: se sono principianti consiglio di far precedere la gara da una o più lezioni, se invece sono sufficientemente preparati si può partecipare direttamente alla gara.

Segnalatemi la vostra partecipazione in modo che possa eventualmente fornirvi il materiale che utilizzo per le lezioni, mandandomi una mail a: `callegar@mat.uniroma2.it` . Nella mail abbiate cura di inserire anche un numero di cellulare in modo che possa inserirvi nel gruppo whatsapp dello stage.

I parte: problemi standard

1. [**Gara Tor Vergata 2008**] In un baule ci sono 1000 calzini alla rinfusa, di 100 colori diversi (10 per ciascun colore). C'è buio e non si vede nulla. Determinare il minimo numero di calzini che bisogna prendere per essere sicuri di averne almeno 2 dello stesso colore.

2. Quanti sono gli anagrammi (contando anche quelli senza senso) della parola **SCADUTO**?

3. Quanti sono gli anagrammi (contando anche quelli senza senso) della parola **ANAGRAMMA**?

4. In quanti modi posso scegliere un gruppo di 4 studenti da una classe di 20?

5. Prendo 3 lettere diverse a caso della parola **SPANDEVI** e le uso per comporre una parola di 3 lettere. Quante diverse parole, anche senza senso, potrei ottenere con questo procedimento?

6. [**Summer School Assisi 2018**] Quanti sono i numeri di 3 cifre tali che la cifra delle centinaia è strettamente maggiore della cifra delle decine e quella delle decine è strettamente maggiore di quella delle unità?

7. [**Gara Tor Vergata 2009**] Quante sono le parole di 8 lettere (anche senza senso) contenenti solo vocali (cioè A, E, I, O, U) e tali che le lettere che vi compaiono siano disposte in ordine alfabetico?

8. Dire quante sono le possibili diverse parti letterali che può avere un monomio nelle variabili x, y, z e w, di grado complessivo 10 e contenente ciascuna delle 4 lettere almeno con esponente 1.

9. Un grillo si trova nella casella d'angolo in basso a sinistra di una scacchiera (cioè di una tabella 8×8) e deve raggiungere la casella diametralmente opposta facendo una sequenza di 14 salti tra caselle contigue (cioè aventi un lato in comune). Quanti sono i diversi percorsi che potrebbe fare?

10. Dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, dire quante sono le funzioni $f : A \to B$.

11. Dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, dire quante sono le funzioni $f : A \to B$ che sono **iniettive**. (N.B. f si dice **iniettiva** se, presi comunque $n, m \in A$, $n \neq m \Longrightarrow f(n) \neq f(m)$)

12. Dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, dire quante sono le funzioni $f : A \to B$ che sono **strettamente crescenti**. (N.B. f si dice **strettamente crescente** se, presi comunque $n, m \in A$, $n < m \Longrightarrow f(n) < f(m)$)

13. Dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, dire quante sono le funzioni $f : A \to B$ che sono **debolmente crescenti**. (N.B. f si dice **debolmente crescente** se, presi comunque $n, m \in A$, $n < m \Longrightarrow f(n) \leq f(m)$)

14. In quanti modi posso scegliere un insieme di 5 numeri interi tra 1 e 20 in modo che la differenza tra due qualsiasi di essi sia almeno 4?

15. Trovare il coefficiente del termine con parte letterale $x^2y^2z^4w$ nello sviluppo di $(x + y + z + w)^9$.

II parte: altri problemi

16. [**Disfida Urbi et Orbi 2011**] Quanti sono gli anagrammi, anche senza senso, della parola **NEOZOICO** che non hanno consonanti consecutive?

17. [**Gara Tor Vergata 2010**] In una stanza buia vi sono 2 ceste, che indicheremo con A e B. La cesta A contiene 5000 scarpe destre: 1000 bianche, 1000 rosse, 1000 verdi, 1000 viola e 1000 gialle. La cesta B invece contiene 5000 scarpe sinistre, ma sempre degli stessi 5 colori della cesta A e nelle stesse quantità per ciascun colore.
Luca deve prendere un paio di scarpe (una scarpa destra e una scarpa sinistra) che abbiano entrambe lo stesso colore ma, essendo buio, non può vedere i colori delle scarpe che prende. Decide quindi di prenderne un numero N_A dalla cesta A e un numero N_B dalla cesta B in modo che, tra le scarpe che ha preso ci siano necessariamente una scarpa destra ed una scarpa sinistra con lo stesso colore.
Qual è il minimo valore che può avere $N_A + N_B$?

18. [**Gara Tor Vergata 2008**] Ugo, Aldo, Luca, Ada, Eva, Ida, Sara e Claudia si siedono ad una tavola rotonda con 8 posti in modo che due maschi non siano mai vicini tra loro. In quanti modi diversi possono farlo? (Due modi di disporsi al tavolo vanno considerati lo stesso, se esiste una rotazione del tavolo che li porta a coincidere)

19. Sia dato un grande pavimento rettangolare avente i lati di 54m e 36m. Vogliamo ricoprirlo con piastrelle rettangolari in modo che valgano le seguenti proprietà:

1. il pavimento è completamente ricoperto dalle piastrelle senza bisogno che queste vengano tagliate;
2. le misure dei lati delle piastrelle, espresse in centimetri, sono intere;
3. le piastrelle sono tutte uguali e vengono posate con la stessa orientazione, cioè, se non sono quadrate, vengono messe in modo che i lati lunghi di tutte le piastrelle siano paralleli tra loro.

Quanti sono i diversi tipi di piastrelle con le quali si può fare? (contando anche i casi con scarso valore pratico, come il caso di un'unica grande piastrella che copre tutto il pavimento)

20. [**Disfida Urbi et Orbi 2012**] In ogni casella di una scacchiera rettangolare 6×8 si vuole scrivere un numero intero strettamente positivo e non superiore a 14. In quanti modi è possibile farlo, rispettando l'ordinamento parziale delle caselle? (cioè facendo in modo che su ogni riga i numeri siano in ordine strettamente crescente passando da sinistra a destra, e su ogni colonna siano in ordine strettamente crescente passando dal basso all'alto)

21. [**Gara Tor Vergata 2008**] Una pulce salta sui punti di coordinate intere dello spazio, partendo da $(0, 0, 0)$. Ogni suo salto consiste nell'incrementare di 1 una e una sola delle 3 coordinate. In quanti modi può arrivare in $(3, 3, 3)$ rimanendo sempre sulla superficie del cubo di lato 3 avente un vertice in $(0, 0, 0)$ e gli spigoli paralleli agli assi cartesiani?

22. [**Gara Tor Vergata 2011**] In una scacchiera 8×8 le righe sono numerate da 1 a 8 e le colonne sono contrassegnate con le lettere che vanno dalla a alla h (esattamente come nel gioco degli scacchi).
Una pulce, situata inizialmente nella casella $b2$, si sposta saltando: i salti ammessi sono solo quelli tra due caselle adiacenti, cioè due caselle distinte aventi un lato in comune.
Determinare quanti sono i percorsi che portano la pulce dalla casella $b2$ alla casella $g7$ che sono composti **esattamente da 12 salti** e che non passano mai due volte per la stessa casella.

23. [**Disfida Urbi et Orbi 2017**] Dire quante sono le terne (A, B, C) dove A, B, C sono sottoinsiemi di $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ tali che $A \cap B$, $B \cap C$, e $C \cap A$ non sono vuoti ma $A \cap B \cap C$ è vuoto. (Ricordare che le terne sono insiemi *ordinati*: ad esempio se $A \neq B$, le terne (A, B, C) e (B, A, C) sono da considerarsi diverse)

24. Claudia riceve una lista di n numeri interi positivi tutti diversi, scritti in ordine casuale. Vince se riesce a estrarne una sottolista di 50 numeri, che conservi l'ordine della lista di partenza e che si presenti ordinata in ordine crescente o decrescente. Altrimenti Claudia perde.
Qual è il minimo valore di n per il quale Claudia è sicura di vincere, qualsiasi sia la lista di n numeri che gli viene data? (se tale n è maggiore di 9999 o se si ritiene che Claudia non possa mai essere sicura di vincere, indicare come risposta 9999.)