Roma, 16 Novembre 2018

Stage Olimpico Urbi et Orbi

Modulo n.3 - gara a tema: **Equazioni Diofantee Lineari**

Nota per l'insegnante.

Questa gara è la terza di 10 gare a tema che costituiscono lo stage Urbi et Orbi ed è, come al solito, divisa in due parti: la prima parte è costituita da problemi standard che servono a testare la preparazione dei neofiti, mentre la seconda, pur non richiedendo più nozioni della prima, richiede un po' di creatività in più. Nella lezione tenuta presso l'ateneo **Tor Vergata**, che ha preceduto la gara, sono state fornite le basi per risolvere i problemi della prima parte, mentre nella discussione post gara si discuterà dei problemi della seconda.

Per le scuole (o i distretti) che invece organizzanno le lezioni **per conto proprio**, partecipando solo alle gare, la modalità di utilizzo della gara dipende dalla preparazione degli studenti: se sono principianti consiglio di far precedere la gara da una o più lezioni, se invece sono sufficientemente preparati si può partecipare direttamente alla gara.

Segnalatemi la vostra partecipazione in modo che possa eventualmente fornirvi il materiale che utilizzo per le lezioni, mandandomi una mail a: `callegar@mat.uniroma2.it` . Nella mail abbiate cura di inserire anche un numero di cellulare in modo che possa inserirvi nel gruppo whatsapp dello stage.

Non usare assolutamente la calcolatrice!

I parte: problemi standard

1. Una cavalletta salta sull'asse x partendo dall'origine. Quando si sposta (sia in avanti che all'indietro) può fare salti lunghi o esattamente 25 unità o esattamente 41 unità. Qual è il minimo numero di salti che deve fare per arrivare nel punto $x = 1$? (se si ritiene sia impossibile dare zero come risposta)

2. Una cavalletta salta sull'asse x partendo dall'origine. Quando si sposta in avanti fa salti lunghi esattamente 25 unità, mentre quando torna indietro fa salti lunghi esattamente 41 unità. Qual è il minimo numero di salti che deve fare per arrivare nel punto $x = 1$? (se si ritiene sia impossibile dare zero come risposta)

3. Una pulce e un grillo saltano sul'asse x. Il grillo parte da $x = 1$ e fa solo salti lunghi esattamente 23 unità mentre la pulce parte da $x = 12$ e fa solo salti lunghi esattamente 17 unità. Qual è il più piccolo numero positivo toccato da entrambi gli animali? (se si ritiene non ce ne siano dare zero come risposta)

4. Sui due piatti di una bilancia ci sono tante palline sia da 16 grammi che da 10 grammi distribuite in modo tale che su ciascun piatto ce ne siano almeno 100 di ciascuno dei due tipi e che la differenza di peso tra i due piatti sia esattamente di 2 grammi. Qual è il minimo numero di palline che può esserci, complessivamente, sui due piatti? (Se si ritiene che sia impossibile dare come risposta 0)

5. Luca deve dare 1 euro a Claudia. Però Luca ha solo banconote da 83 euro, mentre Claudia ha solo banconote da 64 euro. Qual è il minimo numero di banconote da 83 euro che Luca deve dare a Claudia, in modo che questa, possa tenersi esattamente 1 euro, dandogli il resto in banconote da 64 euro?

6. Qual è il più piccolo multiplo positivo di 3287 che termina per 41? (dare come risultato le 4 cifre più basse)

7. Una bilancia a piatti, ha i due piatti A e B che non stanno bene in equilibrio: il piatto A pesa 1 grammo in più del piatto B. Inoltre disponiamo solo di pesetti da 87 grammi e da 35 grammi, in quantità illimitata. Qual è il minimo numero di pesetti che dobbiamo mettere complessivamente sui due piatti della bilancia se vogliamo fare in modo che stiano in equilibrio? Nel caso non sia possibile farlo dare come risposta 0.

8. Come il problema **7**, ma disponendo di pesetti da 78 e da 33 grammi invece che da 87 e 35.

9. Come il problema **7**, ma con i piatti che differiscono di 23 grammi invece che di 1 grammo.

10. [**Gara Tor Vergata 2009**] Una grossa cisterna della capacità di 1 milione di litri è piena esattamente per metà.
Su di essa si può operare in 2 modi:
    - **A** : togliere esattamente 191 litri usando un mestolo gigante;
    - **B** : aggiungere esattamente 480 litri usando un misurino gigante.

    Effettuando opportunamente operazioni di tipo **A** e di tipo **B** si vuole che, alla fine, la quantità di liquido contenuta nella cisterna sia aumentata esattamente di 7 litri rispetto alla situazione iniziale.
    Qual è il minimo numero di operazioni che bisogna fare per riuscirci? (nel caso sia impossibile indicare 0 come risposta)

11. Trovare la somma di tutti gli (eventuali) x interi positivi e minori di 97 che soddisfano la condizione: $48x \equiv 3 \pmod{97}$.

12. Trovare la somma di tutti gli (eventuali) x interi positivi e minori di 98 che soddisfano la condizione: $48x \equiv 3 \pmod{98}$.

13. Trovare la somma di tutti gli (eventuali) x interi positivi e minori di 99 che soddisfano la condizione: $48x \equiv 3 \pmod{99}$.

14. Per far quadrare i conti malgrado la crisi economica, il governo dell'isola *Kenoncè* ha varato la riforma della Matematica: tutti i numeri non interi vengono aboliti mentre tutti gli interi vengono sostituiti dal loro resto modulo 601. Si stabilisce anche che ogni cittadino debba pagare una tassa di un solo sesterzio, ma dilazionata in tante rate da 600 sesterzi (!!!). Quante rate da 600 sesterzi deve pagare ogni cittadino? (si ricordi che si sta lavorando modulo 601)

15. Una cavalletta salta sull'asse x partendo dall'origine. Quando si sposta in avanti può fare salti lunghi 6, 34 o 51 unità, mentre quando si sposta indietro può fare solo salti lunghi 34 o 51 unità. Sapendo che ha fatto una sequenza di salti che l'ha portata nel punto $x = 79$ dire qual è il minimo numero di salti lunghi 6 unità che deve aver fatto. (se si ritiene sia impossibile che arrivi in $x = 79$, dare zero come risposta)

16. [**Gara Classi Prime 2016**] Sull'isola *Kenoncè* i bancomat distribuiscono denaro utilizzando banconote da 5, 20 e 35 sesterzi. Claudia vuole ritirare del denaro in modo da essere sicura di ricevere almeno una banconota da 5 sesterzi. Qual è la massima quantità di denaro che può ritirare?

II parte: altri problemi

17. Sui due piatti di una bilancia ci sono tante palline sia da 16 grammi che da 10 grammi distribuite in modo tale che su ciascun piatto ce ne siano almeno 100 di ciascuno dei due tipi e che la differenza di peso tra i due piatti sia esattamente di 2018 grammi. Ci viene ordinato di spostare palline da un piatto all'altro in modo da riequilibrare i pesi. Qual è il minimo numero di palline che bisogna spostare? (Se si ritiene che sia impossibile dare come risposta 0)

18. In quanti modi posso scegliere n intero positivo e minore di 2018 se voglio che in tutte le soluzioni (x, y, z) dell'equazione equazione diofantea

$$6x + 10y + 15z = n$$

x, y e z siano sempre tutte diverse da zero?

19. Dire quanti sono i numeri interi positivi minori di 77 che ammettono un inverso moltiplicativo modulo 77, cioè tali che, moltiplicandoli per un numero opportuno, si ottiene un risultato che è congruo a 1 modulo 77.

20. Sia $p(x)$ il polinomio che si ottiene sviluppando $\left(1 + x^{64} + x^{83}\right)^{1000}$ e poi sommando tra loro i termini simili. Qual è il più grande n intero positivo che non supera 10000 e tale che in $p(x)$ non c'è il termine di grado n?

21. Tra tutte le coppie di interi (x, y) che risolvono l'equazione diofantea $6765x + 4181y = 1$ trovare quella per la quale x assume il minimo valore positivo. Dare come risposta $-y$. (Usando il procedimento standard i calcoli sono lunghi, ma esiste un trucco per evitarli)

22. [**Gara Tor Vergata 2014**] Un distributore automatico contiene infinite caramelle di due tipi: quelle da 1024 milligrammi (che escono premendo il tasto bianco) e quelle da 1003 milligrammi (che escono premendo il tasto nero). Un bimbo, premendo più volte a suo piacere i tasti bianco e nero, prende delle caramelle e le mette nel suo sacchetto. Sia k il massimo numero intero positivo tale che, qualunque sia la sequenza dei tasti premuti dal bimbo, il sacchetto non conterrà mai k milligrammi di caramelle. Scrivere le ultime 4 cifre di k (cioè migliaia, centinaia, decine e unità). Se si ritiene che tale k non esista indicare come risposta 0.

23. Un canguro si muove saltando nel piano cartesiano. Diremo che un salto è di tipo (a, b) se il canguro salta dal punto (x, y) al punto $(x + a, y + b)$. Sappiamo che il canguro parte da $(0, 0)$ e che può fare salti di 6 tipi: $(10, 14)$, $(6, 10)$, $(15, 35)$, $(-10, -14)$, $(-6, -10)$ e $(-15, -35)$. Qual è il minimo numero di salti che gli servono per arrivare nel punto $(1, 1)$? (se si ritiene sia impossibile che ci arrivi, dare zero come risposta)

24. Indichiamo con F_n l'$n-$esimo numero di Fibonacci (cioè $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ e, per $n \geq 2$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$). Tra tutte le coppie di interi (x, y) che risolvono l'equazione diofantea $F_{70} \cdot x + F_{69} \cdot y = F_{54}$ trovare quella che minimizza il valore di $|x| + |y|$. Dare come risposta $5000 + y$.