

Roma, 20 Dicembre 2018
Stage Olimpico Urbi et Orbi

Modulo n.5 - gara a tema: **Approccio Ricorsivo in Combinatoria**

IMPORTANTE. Vi chiedo cortesemente di rispettare l'orario stabilito per l'inizio della gara: consentire ai propri studenti di cominciare prima toglie la possibilità di divertirsi ai ragazzi che iniziano all'ora giusta.

I parte: problemi standard

1. Una pulce si trova inizialmente nella casella segnata con la **X** della tabella in figura e si muove saltando tra caselle vicine, cioè aventi un lato in comune. Quanti diversi percorsi lunghi 10 passi può fare?

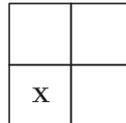


figura 1

2. Una pulce si trova inizialmente nella casella segnata con la **X** della tabella in figura e si muove saltando tra caselle vicine. Quanti diversi percorsi lunghi 13 passi può fare?



figura 2

3. [Summer School Assisi 2018] Una pulce si trova inizialmente nella casella segnata con la **X** della tabella in figura e si muove saltando tra caselle vicine. Quanti diversi percorsi lunghi 13 passi può fare?



figura 3

4. [Gara Tor Vergata 2014] Trovare in quanti modi il numero 14 si può scrivere come somma dei numeri 1 e 2 tenendo conto dell'ordine. (Ad esempio: $1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$ e $1 + 2 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$ vanno considerati diversi e quindi contati entrambi)

5. [Disfida Urbi et Orbi 2011] Una pulce si muove saltando su una scacchiera 10×10 (vedi figura 4). I salti ammessi sono solo quelli tra due caselle adiacenti, cioè aventi un lato in comune.

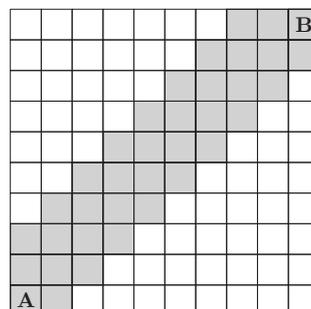


figura 4

Se la pulce parte dalla casella contrassegnata con la lettera **A**, in quanti modi diversi può arrivare alla casella contrassegnata dalla **B**, compiendo un percorso composto da 18 salti e tutto contenuto nella zona evidenziata in grigio?

6. Si consideri una parola \mathcal{P} di 16 lettere tutte diverse. Dire quanti sono i suoi anagrammi con la seguente proprietà: ogni lettera compare nell'anagramma in una posizione distante non più di 1 dalla posizione che occupava in \mathcal{P} .

7. [Gara Tor Vergata 2012] Le pedine della dama si muovono sulla scacchiera secondo la seguente regola: ogni mossa consiste in un solo passo, in avanti, spostandosi in diagonale a destra o a sinistra. Quando la pedina, continuando ad avanzare, arriva all'altro lato della scacchiera, cessa di esistere e si trasforma in *damone*. Immaginiamo che una pedina si trovi nell'angolo in basso a destra di una scacchiera 16×16 . Con quanti percorsi diversi può andare a trasformarsi in *damone*, rimanendo però sempre nelle prime 4 colonne della scacchiera?

8. [Disfida Urbi et Orbi 2016] In quanti modi diversi si può tassellare una striscia di 10 quadrati (vedi figura 5) usando quadrati di colore bianco o nero e rettangoli di colore grigio formati unendo due quadrati?



figura 5

9. Quanti sono i sottoinsiemi di $\{1, 2, 3, \dots, 9, 10\}$ che non contengono interi consecutivi?

10. Claudia prende un cerchio e, una dopo l'altra, traccia dieci corde in modo che ogni nuova corda interseca ciascuna delle corde già tracciate in punti interni alla circonferenza, ma facendo attenzione che tre corde non passino mai per lo stesso punto. In quante zone rimane diviso il cerchio?

11. [Disfida Urbi et Orbi 2014] Trovare in quanti modi il numero 14 si può scrivere come somma di numeri interi strettamente positivi tenendo conto dell'ordine. (Ad esempio: $1 + 4 + 9$ e $4 + 9 + 1$ vanno considerati diversi e quindi contati entrambi)

12. In quanti modi posso ricoprire la tabella 2×10 in figura, usando tasselli della forma indicata a fianco.

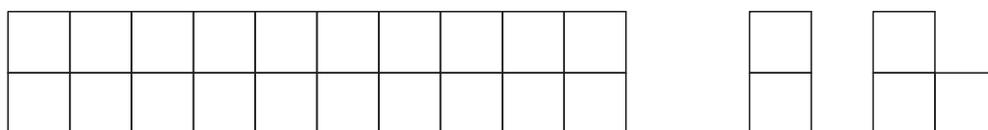


figura 6

I tasselli possono essere ruotati ma non possono essere sovrapposti.

II parte: altri problemi

13. Vogliamo tassellare una striscia di 10 quadrati (vedi figura 7) usando quadrati di colore bianco o nero e rettangoli di colore grigio formati unendo due quadrati, ma facendo in modo che tasselli vicini siano sempre diversi. In quanti modi possiamo farlo?



figura 7

14. [Disfida Urbi et Orbi 2014] Da un pavimento rettangolare $ABCD$ coi lati AB di 12 m e BC di 9 m, tolgo una zona rettangolare $APQR$, tutta contenuta in $ABCD$ e con i lati AP di 10 m e AR di 7 m.

Ciò che rimane è una regione $PBCDRQ$, a forma di "elle", che bisogna ricoprire con 19 lastre di marmo rettangolari delle dimensioni di $1 \text{ m} \times 2 \text{ m}$.

In quanti modi diversi posso farlo?

15. [Gara Tor Vergata 2013] Il pianeta *Strano* ha la forma di un prisma regolare con basi a forma di dodecagono regolare. L'unico abitante si diverte (!!) a percorrere senza sosta il pianeta saltando da una faccia all'altra (purché i salti avvengano sempre tra facce adiacenti, cioè con uno spigolo in comune). Quanti sono i possibili percorsi diversi, lunghi 4 salti, la cui faccia di partenza non sia una faccia laterale del prisma?

16. Diremo che un numero è strambo se, scritto in base 10, ha la seguente proprietà:

1. è costituito solo da cifre "1", "2" e "3";
2. non ci sono cifre "2" consecutive;
3. non ci sono cifre "3" consecutive;

Quanti sono i numeri strambi di 8 cifre?

17. [Disfida Urbi et Orbi 2017] Quanti sono i sottoinsiemi di $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ che contengono una e una sola coppia di numeri interi consecutivi?

18. [Disfida Urbi et Orbi 2012] Abbiamo a disposizione un alfabeto di 8 lettere. Dire quante sono le parole \mathcal{P} che hanno le seguenti proprietà:
- \mathcal{P} è lunga almeno 3 lettere;
 - tutte le lettere che compongono \mathcal{P} sono diverse;
 - togliendo una sola lettera, è possibile trasformare \mathcal{P} in una parola avente tutte le lettere in ordine alfabetico crescente.

19. [Disfida Urbi et Orbi 2012] In quanti modi posso mettere in fila i numeri da 1 a 18 in modo che siano rispettate le seguenti condizioni:
- la somma di due numeri che occupano due posizioni consecutive è sempre dispari;
 - la differenza tra un numero e la posizione che occupa ha sempre valore assoluto non superiore a 2 (si immagini che anche le posizioni siano numerate da 1 a 18).

20. [Disfida Urbi et Orbi 2017] Dire quanti sono gli anagrammi di **AAABBBAAABBB** tali che, comunque li si spezzi in due, in ciascuno dei due pezzi la differenza tra il numero di lettere **A** e il numero di lettere **B** non è mai maggiore di 2.

21. Trovare in quanti modi il numero 20 si può scrivere come somma di numeri dispari positivi, tenendo conto dell'ordine. (Ad esempio: $1 + 13 + 1 + 5$ e $13 + 1 + 5 + 1$ vanno considerati diversi e quindi vanno contati entrambi)

22. Le facce di un dado sono numerate da 1 a 6. In quanti modi diversi posso colorarle usando al più 6 colori se voglio che le facce con un spigolo in comune abbiano sempre colori diversi?

23. Una pulce salta sulle caselle di una scacchiera 3×10 . Ad ogni salto la casella di arrivo e quella di partenza sono adiacenti, cioè hanno un lato in comune. Con quanti percorsi diversi la pulce può andare dalla casella in basso a sinistra a quella in alto a destra toccando ogni casella una e una sola volta?

24. Trovare in quanti modi diversi è possibile ricoprire la seguente griglia con tessere del domino 1×2 , con la restrizione che le tessere non possono essere messe a cavallo dei 4 segmenti verticali segnati in grassetto.

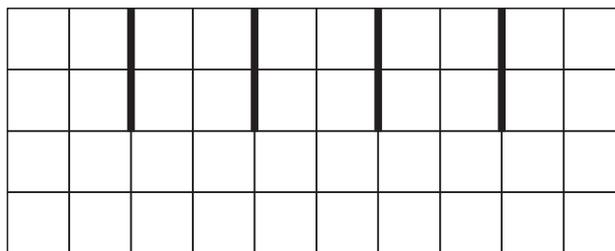


figura 8

I tasselli possono essere ruotati ma non possono essere sovrapposti.

Caro Docente, caro Studente,

se vuoi aiutarci, puoi contribuire ad una miglior riuscita dello stage con le seguenti azioni:

- 1 (per i docenti) Segnarci **quanti studenti hanno partecipato** nella tua scuola.
- 2 (per i docenti) **Segnalare l'iniziativa** ai colleghi di altre scuole che ritieni possano essere interessati.
- 3 (per i docenti) **Linkare nel sito della tua scuola** la pagina web dello stage e del video-corso collegato.
- 4 (per tutti) **Iscriverti** al canale **YouTube** collegato.
- 5 (per tutti) Chiedere l'**amicizia** all'utente **Facebook** collegato.

Stage: <http://www.problemisvolti.it/StageOlimpiadiMatematica.html>

Video Corso: <http://www.problemisvolti.it/CorsoBaseOlimpiadiMatematica.html>

YouTube: [problemisvolti.it](http://www.youtube.com/problemisvolti)

Facebook: [Problemisvolti Puntoit](https://www.facebook.com/ProblemisvoltiPuntoit)