

Roma, 8 Febbraio 2019
Stage Olimpico Urbi et Orbi

Modulo n.7 - gara a tema: Polinomi

I parte: problemi standard

1. [Gara Prime 2018] Un polinomio $p(x)$ è della forma:

$$p(x) = x^{10} + x^9 + \dots \text{ termini di grado inferiore.}$$

Qual è il grado di $(p(x))^2 - p(x^2)$?

2. [Gara Prime 2013] Dato il binomio $x^8 + x^4$, in quanti modi diversi gli si può aggiungere un terzo termine in modo da ottenere il quadrato di un binomio?

3. Trovare il grado del polinomio $p(x)$ sapendo che $p(p(x^2))$ ha grado 7200.

4. [Gara Prime 2014] Si scompone $p(x) = x^6 + 3x^5 + 3x^4 + 9x^3 + 24x^2 + 24x + 8$ nel prodotto di polinomi a coefficienti interi non ulteriormente scomponibili. Quanti fattori si ottengono?

5. [Disfida Urbi et Orbi 2016] Sia $p(x)$ un polinomio. Se il grafico di $y = p(x)$ interseca quello della retta $y = x$ esattamente in 17 punti, qual è il minimo grado che può avere il polinomio $p(x)$?

6. [Gara Tor Vergata 2009] Eseguendo la divisione con resto tra il polinomio $p_1(x) = -3x^{81} + 10x^{41} + x^{27} + 6x^{21} + 2x^7 + x^2 + 9x + 53$ e il polinomio $p_2(x) = x^{20} + 2$ si ottiene un certo polinomio quoziente $q(x)$ e un polinomio resto $r(x)$, quest'ultimo con grado strettamente minore di $p_2(x)$. Quanto vale $r(23)$?

7. Del polinomio $p(x)$ sappiamo che $p(p(x)) = x^4 + 16x^3 + Ax^2 - 48x - 14$, dove con A abbiamo indicato il coefficiente di $p(p(x))$ che non conosciamo. Quanto vale A ?

8. Trovare la somma delle soluzioni reali dell'equazione $x^3 - 39x^2 + 358x + 398 = 0$.

9. Trovare la somma dei quadrati dei reciproci delle soluzioni reali dell'equazione $398x^3 + 358x^2 - 39x + 1 = 0$.

10. [Summer School Assisi 2018] Sia $h(x)$ il polinomio monico di grado massimo che divide sia $p(x) = x^9 + 2x^5 + 3x^3$ che $q(x) = x^9 + 2x^5 + 3x^3 + x^2 + 1$. Quanto vale $h(12)$?

11. Quanti sono i polinomi a coefficienti reali $p(x)$, non identicamente nulli, che soddisfano simultaneamente le due identità:

$$p(x^3) = (p(x))^3 \quad \text{e} \quad p(2x) = 2p(x).$$

12. [Summer School Assisi 2018] Del polinomio $p(x)$ sappiamo che dividendolo per $x - 1$ si ottiene come resto 16 mentre dividendolo per $x + 2$ si ottiene come resto 10. Dividendolo per $x^2 + x - 2$ si ottiene come resto un polinomio del tipo $ax + b$. Quanto vale il prodotto ab ?

II parte: altri problemi

13. [Gara Prime 2018] Del polinomio $p(x)$ sappiamo che

$$(x^6 - 3x - 1) \cdot p(x) = x^{17} - x^{11} - 6x^7 - 4x^6 - 9x^2 + 1.$$

Qual è la somma dei coefficienti di $p(x)$?

14. [Gara Tor Vergata 2013] Qual è il più grande numero intero positivo $n \leq 9999$ tale che il polinomio $x^4 + n$ si può scomporre come prodotto di due polinomi di secondo grado a coefficienti interi?

15. [Concorso INDAM 2014] Il polinomio a coefficienti reali $p(x)$ soddisfa per ogni valore di x la condizione $(p(x))^2 = p(p(x)) - 3$. Quanto vale $p(4)$?

16. [Summer School Assisi 2018] Sia $p(x) = x^3 - 3x + 7$ e sia $q(x)$ il polinomio di grado 4 tale che $q(1) = p(1)$, $q(2) = p(2)$, $q(3) = p(3)$, $q(-2016) = p(-2016)$, e $q(4) = 24299$. Quanto vale $-q(0)$? (dare come risposta le 4 cifre più basse del risultato)

17. [Gara Tor Vergata 2014] Di un polinomio $P(x)$ sappiamo che ha 2014 radici reali, tutte diverse tra loro. La somma di tali radici è 100, mentre la somma dei loro quadrati è 3000. Trovare la somma dei quadrati delle radici reali di $P(x+1)$.
18. [Gara Tor Vergata 2014] Sia dato il polinomio $p(x, y) = x^8 + y^8 + 2x^2y^6 + 2x^6y^2 + 3x^4y^4$. Trovare il più grande numero primo che divide $p(17, 13)$.
19. [Summer School Assisi 2018] Un polinomio $f(x)$ di grado 9 è tale che $f(11) = 1$, $f(12) = 2$, $f(13) = 4$, $f(14) = 8$, $f(15) = 16$, $f(16) = 32$, $f(17) = 64$, $f(18) = 128$, $f(19) = 256$, $f(20) = 512$. Quanto vale $f(24)$?
20. [Summer School Assisi 2018] Sia $p(x) = x^4 + 18x^3 + kx^2 + 200x - 1984$. Determinare k sapendo che il prodotto di due delle 4 radici del polinomio è 32.
21. [Summer School Assisi 2018] Siano $P(x)$ e $Q(x)$ polinomi tali che $P(P(x)) = (P(x))^{16} + x^{48} + Q(x)$. Determina il grado minimo possibile per Q .
22. [Gara Tor Vergata 2012] Un polinomio $p(x)$ ha un certo grado $n > 1$ (che non è noto) ed è dotato delle seguenti proprietà:
- il coefficiente del termine di grado n è $\frac{1}{144}$;
 - per ogni numero reale a , le espressioni $(a+2019) \cdot p(a-2)$ e $(a+3) \cdot p(a+5)$ forniscono come risultato lo stesso valore.
- Qual è il coefficiente del termine di grado $n-1$?
23. Sia $U = \{1, 2, 3, \dots, 2010\}$. Per ogni $i = 1, \dots, 2010$ indichiamo con S_i la somma di tutti i prodotti di i elementi distinti di U , cioè:
- $$S_i = \sum_{\substack{1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_i \leq 2010 \\ a_1, a_2, \dots, a_i \in \mathbf{N}}} a_1 a_2 \dots a_i.$$
- Trovare le 4 cifre più basse del numero $S_1 + S_2 + \dots + S_{2010}$.
24. [Disfida Urbi et Orbi 2018] Un polinomio di settimo grado P è tale che $P(x) - 32$ è divisibile per $(x+1)^4$ e $P(x) + 32$ è divisibile per $(x-1)^4$. Quanto vale $P(2)$?

Caro Docente, caro Studente,

ti ricordo che puoi aumentare la visibilità dello stage diffondendone sui media i link alla pagina ufficiale e al canale Youtube.

Una maggior visibilità ci aiuterà a trovare le risorse per ripetere lo stage.

Ti ringrazio fin da ora.

Emanuele Callegari

Stage: <http://www.problemisvolti.it/StageOlimpiadiMatematica.html>

Video Corso: <http://www.problemisvolti.it/CorsoBaseOlimpiadiMatematica.html>

YouTube: [problemisvolti.it](http://www.problemisvolti.it)