

Roma, 18 Ottobre 2019

# Stage/Campionato Urbi et Orbi

Modulo n.1 - gara a tema: **Aritmetica Zero**  
(divisori, MCD e mcm)

**Nota.** I problemi che seguono possono tutti essere risolti utilizzando le nozioni spiegate nelle due lezioni di preparazione alla gara che ho tenuto a Tor Vergata. Quelli della prima parte sono o molto semplici o molto simili a problemi già svolti a lezione. Quelli della seconda parte richiedono in genere un po' di creatività in più.

**Notazione:** quando nel seguito parliamo di divisori di un numero  $n$  è sempre sottinteso, anche se non viene ricordato esplicitamente, che si tratta dei divisori positivi e che vanno considerati anche 1 e lo stesso  $n$ .

## I parte: problemi standard

1. Calcolare  $\text{MCD}(24000, 7904)$ .
2. Calcolare  $\text{mcm}(24000, 7904)$ . Dare come risposta il numero che si ottiene dopo aver cancellato gli zeri finali del risultato.
3. Quanti sono i divisori di 111222111, contando anche 1 e il numero stesso?
4. Qual è il più piccolo intero positivo  $n$  che ha esattamente 8 divisori, contando tra questi anche 1 e  $n$ ?
5. Trovare, se esiste,  $n$  intero positivo in modo che  $\text{MCD}(n, 1000) = 40$  e  $\text{mcm}(n, 1000) = 144000$ . Se non esiste indicare come risposta 0. Se invece ne esistesse più di uno, indicare come risposta 9999.
6. Quanti sono i divisori positivi dispari di 54054 che sono divisibili per 3?
7. Calcolare  $\text{MCD}(851851, 15911591)$ .
8. Trovare il più piccolo valore  $A$  tale che esistono almeno due interi positivi distinti  $n$  ed  $m$  aventi entrambi  $A$  come somma dei loro divisori positivi.
9. Se si scrive la lista, in ordine crescente, di tutti i divisori positivi di 14400, compresi 1 e 14400, quale numero si trova nella 32-esima posizione?
10. **[Gara Tor Vergata 2008]** Determinare quante sono le cifre del prodotto di tutti i divisori di 1000000 (compresi 1 e 1000000).
11. Qual è la somma di tutti i divisori di 3072, contando anche 1 e il numero stesso?
12. Calcolare la somma di tutti i divisori positivi pari di 2700, compreso 2700.
13. Il prodotto di tutti i divisori positivi di  $n$  vale  $7^{4950}$ . Quanti sono i divisori positivi di  $n$ ?
14. In quanti modi 2009 può essere scritto come differenza di quadrati?

## II parte: altri problemi

15. In quanti modi  $210^{11}$  può essere scritto come differenza di quadrati?
16. **[Summer School Assisi 2019]** Trovare la somma di tutti i quadrati che dividono  $12^5$ . Dare come risposta le ultime 4 cifre del risultato.
17. **[Disfida Urbi et Orbi 2011]** Qual è il più grande intero  $n$ , tale che esiste almeno un intero  $m$ , con  $0 \leq m \leq 10000$ , tale che  $2m + 1$  ha esattamente  $n$  divisori?  
(N.B. tra i divisori del numero  $2m + 1$  vanno considerati anche 1 e il numero stesso)
18. Trovare il più piccolo  $n$  dispari tale che  $n^2$  ha il triplo dei divisori di  $n$ .
19. Trovare  $n$  intero positivo sapendo che il prodotto di tutti i suoi divisori positivi è  $60^{450}$ . Dare come risposta il numero che si ottiene cancellando da  $n$  tutti gli zeri finali. Se gli  $n$  con la proprietà richiesta fossero più di uno, scegliere il più piccolo. Se invece non ci fosse alcun  $n$ , dare come risposta zero.
20. Dire quanti sono gli interi  $m$ , non primi e con  $2 \leq m \leq 1000$ , per i quali esiste un intero  $n$  tale che calcolando il prodotto di tutti i divisori positivi di  $n$  si ottiene proprio  $m$ .

21. Trovare tutti gli interi positivi  $m$ , per i quali esiste un intero  $n$  tale che calcolando il prodotto di tutti i divisori positivi di  $n$  si ottiene  $2^{35} \cdot 10^m$ . Dare come risposta la somma di tutti i valori trovati per  $m$ .
22. Per ogni  $n$  intero positivo si indichi con  $\sigma(n)$  la somma di tutti i divisori interi positivi di  $n$ . Qual è il **minimo** valore di  $\frac{\sigma(n)}{n}$  al variare di  $n$  tra 2 e 100? (Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini che si ottiene come risultato)
23. Per ogni  $n$  intero positivo si indichi con  $\sigma(n)$  la somma di tutti i divisori interi positivi di  $n$ . Qual è il **massimo** valore di  $\frac{\sigma(n)}{n}$  al variare di  $n$  tra 2 e 100? (Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini che si ottiene come risultato)
24. Sia  $A$  l'insieme di tutti i divisori di 100000, compresi 1 e 100000. In quanti modi posso scegliere un sottoinsieme  $B$  di  $A$ , contenente almeno 2 elementi, tale che ogni elemento di  $B$  non sia divisore di alcun altro elemento di  $B$ ?

---

---

## A gara finita ...

Potrai trovare tutto il materiale didattico dello stage (**lezioni, testi gare, risultati**) linkato alla pagina:

<http://www.problemisvolti.it/ZStageMateriale.html>

---

---

## Info Campionato Urbi et Orbi

Le squadre iscritte al Campionato Urbi et Orbi devono partecipare a questa gara con lo stesso nome con cui si sono registrate al Campionato, in modo che a fine gara io possa aggiornare correttamente la classifica.

La classifica aggiornata del Campionato sarà linkata alla pagina dello stage riportata sotto.

Le squadre non iscritte al Campionato sono invitate a NON usare come nomi di squadra quelli già registrati dalle squadre che si sono iscritte, il cui elenco è linkato alla pagina dello stage:

<http://www.problemisvolti.it/StageOlimpiadiMatematica.html>