

Roma, 8 Novembre 2019

Stage/Campionato Urbi et Orbi

Modulo n.2 - gara a tema: **Combinatoria Zero**
(conteggi standard)

Nota. I problemi che seguono possono tutti essere risolti utilizzando le nozioni spiegate nelle due lezioni di preparazione alla gara che ho tenuto a Tor Vergata. Quelli della prima parte sono o molto semplici o molto simili a problemi già svolti a lezione. Quelli della seconda parte richiedono in genere un po' di creatività in più.

I parte: problemi standard o molto semplici

1. Quanti sono gli anagrammi della parola **AIUOLE** che iniziano per vocale?
2. Quanti sono gli anagrammi della parola **ATTRATTA** che iniziano e finiscono con la stessa lettera?
3. Al lunedì a scuola ho 6 materie tutte diverse e posso giustificarmi solo in 2. In quanti modi posso scegliere le 4 materie da studiare?
4. Cancellando 3 cifre a caso dal numero **123456789** ottengo sempre un numero di 6 cifre. Quanti diversi numeri di 6 cifre posso ottenere in questo modo?
5. Quanti termini può avere, al massimo, un polinomio omogeneo di secondo grado, di 10 variabili, ridotto ai minimi termini?
6. Un grillo salta tra i punti di coordinate intere del piano cartesiano facendo solo salti di lunghezza 1. Parte dal punto $(-4, -3)$ e arriva nel punto $(3, 4)$ facendo una sequenza di 14 salti. Quante sono le diverse sequenze di salti che lo fanno passare per il punto $(0, 0)$?
7. [Summer School Assisi 2018] Un papà distribuisce 17 caramelle (uguali) alle sue 5 figlie, in modo che ciascuna ne abbia almeno 2. In quanti modi lo può fare?
8. Trovare il coefficiente di x^3y^4 nello sviluppo di $(x + y + \frac{1}{2})^{10}$.
9. Dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dire quante sono le funzioni $f : A \rightarrow B$ che sono sia **debolmente crescenti** che **suriettive**. (Si ricorda che **debolmente crescente** significa che comunque scelti a_1 e a_2 in A , se $a_1 < a_2$ allora $f(a_1) \leq f(a_2)$. Invece **suriettiva** significa che per ogni b in B esiste a in A tale che $f(a) = b$.)
10. Sette fratelli vanno al cinema e trovano una fila di 7 posti consecutivi su cui sedersi. Però vogliono distribuirsi sui 7 posti in modo che i 3 fratelli più piccoli siano sempre staccati, per evitare che si mettano a parlare. In quanti diversi modi possono farlo?
11. [Disfida Urbi et Orbi 2015] Nelle parole **numeriRUMENI** e **ruminIMURENE** ogni minuscola precede la corrispondente maiuscola. Sia N il numero dei loro anagrammi con la stessa proprietà. Trovare le ultime 4 cifre di N , cioè migliaia, centinaia, decine ed unità.
12. Nella parola **SPASSOSE** compare la sequenza **SS**, cioè almeno due **S** sono appiccate tra loro. Quanti sono i suoi anagrammi con la stessa proprietà?

II parte: altri problemi

13. Quante sono le funzioni $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 15\}$ tali che per ogni $n, m \in \{1, 2, 3, 4\}$, con $n \neq m$, si ha $|f(n) - f(m)| \geq 3$?
14. Cancellando 2 lettere a caso dalla parola **ABABABCCABABAB** ottengo sempre una parola di 12 lettere. Quante diverse parole di 12 lettere posso ottenere in questo modo?
15. [Summer School Assisi 2019] Trovare il coefficiente di $x^{14}y^{14}z^7w^{10}$ nello sviluppo di $(xyz + xyw + \frac{xzw}{9} + \frac{yzw}{10})^{15}$, dopo aver sommato tra loro i termini simili.
16. Calcolare la somma algebrica dei coefficienti di tutti i termini di quinto grado nello sviluppo di $(x + y + z + w + \frac{1}{2} - v - \frac{1}{6})^9$.
17. [Summer School Assisi 2019] La parola **NINNANANNA** ha la seguente proprietà: comunque la si tagli in due pezzi, nel primo pezzo (quello di sinistra) le lettere **N** sono almeno la metà. Quanti sono i suoi anagrammi che hanno la stessa proprietà?
18. In quanti modi posso scegliere due divisori distinti di 54000 (contando tra i divisori anche 1 e 54000) in modo che uno dei due divida l'altro?
19. Quanti sono i numeri di 8 cifre, tutte diverse, che sono divisibili per 18? Dare come risposta il risultato trovato, privato di eventuali zeri finali.

20. Dato $I = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ diremo che una terna ordinata (A, B, C) di sottoinsiemi di I è **buona** se $A \cup B \cup C = I$, $A \cap B \cap C = \emptyset$, ma $A \cap B$, $A \cap C$ e $B \cap C$ sono composti ciascuno esattamente da 2 elementi. Quante sono le terne **buone**? (dare come risposta le ultime 4 cifre del risultato)

21. Detto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, dire quante sono le funzioni $f : A \rightarrow A$ tali che, per ogni $n \in A$ si ha $f(n) \neq n$ ma $f(f(f(f(f(f(n))))) = f(n)$.

22. Una pulce salta tra le caselle di una scacchiera 6×6 in modo che, ad ogni salto, la casella di partenza e quella di arrivo hanno esattamente un lato in comune. Se parte dalla casella in basso a sinistra, con quante diverse sequenze di 14 salti può arrivare alla casella in alto a destra? (Dare come risposta le ultime 4 cifre del risultato)

23. [Summer School Assisi 2019] Dire quante sono le permutazioni $(a_1, a_2, \dots, a_{10})$ di $\{1, 2, \dots, 10\}$ tali che

$$|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_9 - a_{10}| = 49.$$

24. Sia D l'insieme di tutti i divisori di 1600, compresi 1 e 1600. Diciamo che un sottoinsieme B di D è **buono** se ogni elemento b di B divide tutti gli elementi di B maggiori di lui. Quanti sono i sottoinsiemi buoni non vuoti di D ?

A gara finita ...

Potrai trovare tutto il materiale didattico dello stage (**lezioni, testi gare, risultati**) linkato alla pagina:

<http://www.problemisvolti.it/ZStageMateriale.html>

Info Campionato Urbi et Orbi

Le squadre iscritte al Campionato Urbi et Orbi devono partecipare a questa gara con lo stesso nome con cui si sono registrate al Campionato, in modo che a fine gara io possa aggiornare correttamente la classifica.

La classifica aggiornata del Campionato sarà linkata alla pagina dello stage riportata sotto.

Le squadre non iscritte al Campionato sono invitate a NON usare come nomi di squadra quelli già registrati dalle squadre che si sono iscritte, il cui elenco è linkato alla pagina dello stage:

<http://www.problemisvolti.it/StageOlimpiadiMatematica.html>