

Roma, 29 Novembre 2019

Stage/Campionato Urbi et Orbi

Modulo n.3 - gara a tema: Equazioni Diofantee e Congruenze

Nota. I problemi che seguono possono tutti essere risolti utilizzando le nozioni spiegate nelle due lezioni di preparazione alla gara. Quelli della prima parte sono o molto semplici o molto simili a problemi già svolti a lezione. Quelli della seconda parte richiedono in genere un po' di creatività in più.

I parte: problemi standard o molto semplici

1. Una pulce e un grillo saltano sulla retta dei numeri. La pulce parte da 0 e fa salti lunghi 17 unità, mentre il grillo parte da 1 e fa salti di 13 unità. Qual è il più piccolo numero positivo che può essere toccato da entrambi?
2. Una pulce e un grillo saltano sulla retta dei numeri. La pulce parte da 0 e fa salti lunghi 747 unità, mentre il grillo parte da 26 e fa salti di 350 unità. Qual è il più piccolo numero positivo che può essere toccato da entrambi?
3. Trovare la somma di tutti gli eventuali interi x , compresi tra 0 e 42 che soddisfano la condizione: $6x \equiv 18 \pmod{43}$.
4. Siano a , e b due cifre del numero $n = 250a10b315576$. Se n è divisibile per 99, quanto vale $10a + b$?
5. Trovare la somma di tutti gli eventuali interi x , compresi tra 0 e 41 che soddisfano la condizione: $6x \equiv 18 \pmod{42}$.
6. Trovare la somma di tutti gli eventuali interi x , compresi tra 0 e 41 che soddisfano la condizione: $6x \equiv 15 \pmod{42}$.
7. [Summer School Assisi 2019] Una nota canzone dell'isola *Kenoncè*, anziché raccontare (come nel resto del mondo) di 44 gatti in fila per 6 col resto di 2, racconta di n gatti (con $8000 < n < 9500$) che in fila per 7 danno il resto di 5 mentre in fila per 11 e per 13 danno sempre il resto di 0. Quanto vale n ? Se tale n non esiste dare come risposta 0 mentre se non fosse univocamente determinato dare come risposta 9999.
8. Una pulce, un grillo e una cavalletta saltano sulla retta dei numeri. La pulce parte da 0 e fa salti lunghi 23 unità, il grillo parte da 1 e fa salti di 17 unità mentre la cavalletta parte da -1 e fa salti di 19 unità. Qual è il più piccolo numero positivo che può essere toccato da tutti e tre?
9. Una pulce, un grillo e una cavalletta saltano sulla retta dei numeri seguendo le stesse regole del problema 8. Qual è la minima distanza tra due punti distinti che possano essere toccati da tutti e tre?
10. Trovare la cifra delle unità di 2013^{2019} .
11. Trovare le ultime due cifre di 1997^{2009} .
12. [Summer School Assisi 2019] Calcolare il resto della divisione di $2^{1198765432104}$ per 26.

II parte: altri problemi

13. Trovare il massimo tra tutti i numeri che compaiono come ascissa o ordinata di un punto di coordinate intere che soddisfa l'equazione $40x^2 + 21y^2 - 58xy - 29 = 0$.
14. Una pulce salta sulla retta dei numeri. Parte da 0 e deve raggiungere 1 facendo solo salti lunghi 77, 91 o 143. Qual è il minimo numero di salti che deve fare se quelli da 143 può farli solo in avanti?
15. [Gara Tor Vergata 2010] Attorno alla stella *Lucente* ruotano nello stesso verso con velocità costanti su orbite circolari (aventi *Lucente* come centro e giacenti tutte sullo stesso piano) tre pianeti: *Bingo*, *Bango* e *Bongo*. Sapendo che i periodi di rivoluzione dei tre pianeti sono rispettivamente 24, 88 e 152 anni terrestri, e che, ad un certo istante, essi giacciono tutti sulla stessa semiretta avente origine in *Lucente*, dire quanto vale, misurato in anni terrestri, il minimo intervallo di tempo che deve trascorrere prima che i tre pianeti giacciono di nuovo tutti su una semiretta avente origine in *Lucente*.
16. [Summer School Assisi 2019] Determinare il più piccolo primo p tale che:
$$\begin{cases} p^{2222} \equiv p \pmod{11} \\ (p-2)^p \equiv 2p \pmod{23} \end{cases}$$
17. [Summer School Assisi 2019] Determinare il minimo intero positivo x tale che 209 divide $x^{201} - x^{21} + 11x$.
18. [Gara Tor Vergata 2013] Detti $n = 600!$ e $m = 177! \cdot 313! \cdot 111!$ trovare il resto della divisione tra n e m . (Se tale resto fosse maggiore di 9999, indicare come risposta 9999)

19. [Disfida Urbi et Orbi 2017] Sull'isola di *Kenoncè* i distributori di caramelle hanno due pulsanti: se si preme il primo pulsante esce un numero fissato x di caramelle mentre se si preme il secondo ne esce un numero fissato y . Leo va con 10 suoi amici, preme 3 volte il primo pulsante e 7 volte il secondo, e poi prova a dividere le caramelle in 11 parti uguali, ma non ci riesce perché ne restano 9. Arrivano altri due amici, e decidono di premere entrambi i pulsanti altre due volte, sperando che aggiungendo le nuove caramelle a tutto il mucchio precedente si riesca a dividerle in parti uguali tra 13 persone, ma anche questa volta non ci riescono perché gliene restano 2. Trovare tutte le possibili coppie (x, y) , che soddisfano le ulteriori condizioni $0 < x \leq 75$ e $0 < y \leq 100$. Dare come risposta il numero che si ottiene aggiungendo alla somma di tutti i possibili y il doppio della somma di tutti i possibili x .

20. [Summer School Assisi 2019] Un grillo salta tra i punti di coordinate intere del piano cartesiano. Parte da $(0, 0)$ e vuole arrivare in $(1, 1)$. Ogni salto consiste nel sommare o sottrarre alla sua posizione uno dei seguenti vettori: $(21, 33)$, $(15, 21)$ o $(35, 77)$. Qual è il minimo numero di salti che deve fare?

21. Sia φ la funzione "φ di Eulero", ovvero $\varphi(n)$ indica quanti sono gli interi compresi tra 1 e n che sono coprimi con n . Per ogni intero positivo n definiamo:

$$a_n = \overbrace{\varphi(\varphi(\dots\varphi(\varphi(517^{100})\dots))\dots))}^n$$

Qual è il più piccolo valore di n per il quale si ha $a_n = 1$?

22. Trovare le ultime 4 cifre del numero:

$$2^{3^5 7^{11} 13^{\dots 97}}$$

dove sono stati usati tutti e soli i numeri primi minori di 100.

23. Trovare la somma di tutti gli n interi positivi tali che $\varphi(n) = 60$, dove φ è la cosiddetta funzione "φ di Eulero", ovvero $\varphi(n)$ indica quanti sono gli interi compresi tra 1 e n che sono coprimi con n .

24. Posto $A = 2019!$ indichiamo con n il numero di zeri finali di A e con c la cifra delle unità del numero che si ottiene cancellando da A tutti gli zeri finali. Quanto vale $1000c + n$?

A gara finita ...

Potrai trovare tutto il materiale didattico dello stage (**lezioni, testi gare, risultati**) linkato alla pagina:

<http://www.problemisvolti.it/ZStageMateriale.html>

Info Campionato Urbi et Orbi

Le squadre iscritte al Campionato Urbi et Orbi devono partecipare a questa gara con lo stesso nome con cui si sono registrate al Campionato, in modo che a fine gara io possa aggiornare correttamente la classifica.

Le squadre non iscritte al Campionato sono invitate a NON usare come nomi di squadra quelli già presenti in classifica.

La classifica aggiornata del Campionato è linkata alla pagina dello stage:

<http://www.problemisvolti.it/StageOlimpiadiMatematica.html>