

Roma, 20 Dicembre 2019

# Stage/Campionato Urbi et Orbi

Modulo n.4 - gara a tema: **Tecniche Varie di Combinatoria**

**Nota.** I problemi che seguono possono tutti essere risolti utilizzando le nozioni spiegate nelle due lezioni di preparazione alla gara. Quelli della prima parte sono o molto semplici o molto simili a problemi già svolti a lezione. Quelli della seconda parte richiedono in genere un po' di creatività in più.

## I parte: problemi standard o molto semplici

1. In quanti modi diversi 6 amici possono sedersi nei 6 posti di una tavola rotonda? (due configurazioni vanno considerate uguali, e quindi contate una sola volta, se si possono ottenere una dall'altra con una rotazione)
2. **Eta, Zeta, Beta e Meta** sono 4 città, tali che, comunque se ne scelgano 2, c'è sempre un volo diretto che le collega. Luca parte da **Beta** e vola da una città all'altra. In quanti modi diversi può fare una sequenza di 8 voli?
3. In quanti modi diversi 6 amici possono sedersi nei 6 posti di una tavola rotonda? (due configurazioni vanno considerate uguali, e quindi contate una sola volta, se ogni persona è vicina alle stesse persone, senza curarsi di quale delle due persone vicine sia a destra e quale sia a sinistra)
4. **Eta, Zeta, Beta e Meta** sono 4 città, tali che, comunque se ne scelgano 2, c'è sempre un volo diretto che le collega. Luca parte da **Beta** e vola da una città all'altra. In quanti modi diversi può fare una sequenza di 8 voli che termini nella città da cui è partito?
5. [Summer School Assisi 2019] Quanti diversi dadi dodecaedrici si possono costruire distribuendo i primi 12 numeri interi positivi sulle 12 facce di un dodecaedro regolare? Indicare come risposta le 4 cifre più basse del risultato. (Due dadi dodecaedrici sono da considerarsi uguali e quindi vanno contati una sola volta se esiste una rotazione nello spazio che li fa sovrapporre)
6. [Summer School Assisi 2019] Una pulce salta tra le 4 caselle di una tabella  $2 \times 2$  rispettando la condizione che ogni salto avvenga tra due caselle che hanno un lato in comune. Quante sono le possibili sequenze di 10 salti consecutivi che hanno la casella di partenza diversa dalla casella di arrivo?
7. Una pulce salta sulla retta reale partendo dal punto  $x = 0$  e facendo salti di lunghezza 1, in avanti o all'indietro, ma con la condizione aggiuntiva che, se la pulce si trova su di un punto corrispondente ad un numero pari, il salto può solo essere in avanti. Quante sono le diverse sequenze di 20 salti che può fare?
8. [Summer School Assisi 2019] Quanti sono i numeri binari di 15 cifre nei quali le cifre uguali a zero non sono mai in posizioni consecutive?
9. [Gara Tor Vergata 2009] In quanti modi il numero 200 può essere scritto come somma di 3 numeri interi non negativi, eventualmente anche nulli? (due modi vanno considerati uguali se, a meno dell'ordine, sono composti dagli stessi numeri)
10. In un poligono regolare di 11 lati, ciascun lato viene colorato usando un colore a scelta tra **bianco, rosso o verde**, senza l'obbligo di usare tutti i colori. In quanti modi diversi si può farlo? (due colorazioni vanno considerate uguali, e quindi contate una sola volta, se esiste una rotazione o una simmetria assiale che le fa coincidere)
11. Quanti sono gli anagrammi di **MATEMATICI** che iniziano per **C** e non hanno due lettere uguali vicine?
12. Le caselle di una tabella  $4 \times 10$  sono numerate da 1 a 40. In quanti modi posso scegliere 3 numeri distinti da 1 a 40, in modo che le tre corrispondenti caselle non abbiano nessun lato in comune?

## II parte: altri problemi

13. Quanti sono i numeri di 8 cifre formati con le cifre 1 e 2 in cui esiste almeno una cifra 2 preceduta e seguita da una cifra 1?
14. Una pulce si trova inizialmente nella casella segnata con la **X** della tabella in figura e si muove saltando tra caselle vicine. Quanti diversi percorsi lunghi 13 passi può fare?



figura 1

15. Ciascuna delle 8 facce (base compresa) di una piramide regolare a base ettagonale viene colorata di **blu, verde, giallo, arancio o rosso**, con l'obbligo di usare tutti i colori. Quante sono le diverse colorazioni possibili? (Due colorazioni vanno considerate identiche e quindi contate una sola volta se c'è una rotazione nello spazio che le fa sovrapporre) Dare come risposta le ultime 4 cifre del risultato.

16. Vogliamo tassellare una striscia di 10 quadrati (vedi figura 2) usando quadrati di colore bianco o nero e rettangoli di colore grigio formati unendo due quadrati. In quanti modi possiamo farlo se vogliamo cominciare e finire con tasselli uguali?

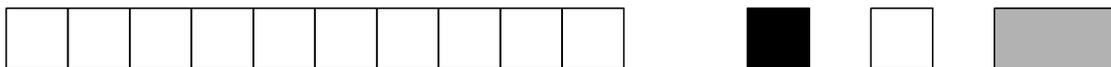


figura 2

17. Vogliamo scrivere i numeri interi da 1 a 20, ciascuno esattamente una volta, nelle 20 caselle della figura 3 in modo che valga la seguente proprietà: *se due caselle hanno in comune una parte di lato verticale, il numero scritto in quella più a destra è più grande.*

In quanti modi possiamo farlo se vogliamo che il numero 18 venga scritto nell'ultima colonna?

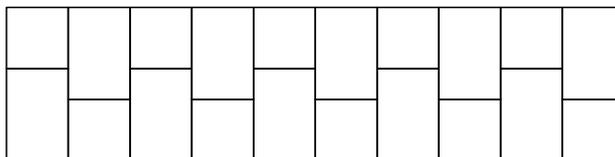


figura 3

18. Ciascuna delle 6 facce di un cubo viene colorata di **blu**, **verde**, **giallo**, **arancio** o **rosso**, senza l'obbligo di usare tutti i colori e in modo che non ci siano facce dello stesso colore con lati in comune. Quante sono le diverse colorazioni possibili? (Due colorazioni vanno considerate identiche e quindi contate una sola volta se c'è una rotazione nello spazio che le fa sovrapporre)

19. In quanti modi diversi si possono distribuire i primi 6 numeri interi positivi sulle 8 facce di un ottaedro regolare con l'obbligo di usare tutti i numeri almeno una volta? (Due distribuzioni vanno considerate identiche e quindi contate una sola volta se c'è una rotazione nello spazio che le fa sovrapporre)

20. [Summer School Assisi 2019] Ho una tabella  $4 \times 15$  e devo ricoprirla interamente usando 20 tasselli  $3 \times 1$ . In quanti modi diversi posso farlo?

21. [Summer School Assisi 2019] Quante sono le sequenze finite di uno o più numeri interi strettamente positivi, non tutti dispari, ed aventi come somma 10?

22. [Disfida Urbi et Orbi 2016] Dire quante sono le permutazioni  $(a_1, a_2, \dots, a_{13})$  dei numeri interi da 1 a 13 tali che  $a_i < a_{2i}$  e  $a_i < a_{2i+1}$  per ogni  $i = 1, \dots, 6$ . Se il risultato ha più di 4 cifre, dare come risposta le 4 cifre finali, cioè migliaia, centinaia, decine ed unità.

23. Una pulce salta sulla retta dei numeri: parte da zero e fa una sequenza di 7 salti di lunghezze tutte diverse. Ogni salto può essere in avanti o all'indietro e la sua lunghezza è del tipo  $3^n$ , con  $0 \leq n \leq 6$ . Quante sono le diverse sequenze di salti per le quali, durante tutto il percorso, la pulce non tocca mai un numero negativo? Dare come risposta le ultime 4 cifre del numero trovato.

24. Ciascuna delle 8 facce (base compresa) di una piramide regolare a base ettagonale viene colorata di **blu**, **verde**, **giallo**, **arancio** o **rosso** (senza l'obbligo di usare tutti i colori) in modo che ogni eventuale faccia rossa abbia in comune esattamente un lato con un'altra faccia rossa mentre per tutti gli altri colori non ci siano facce dello stesso colore con lati in comune. Quante sono le diverse colorazioni possibili? (Due colorazioni vanno considerate identiche e quindi contate una sola volta se c'è una rotazione nello spazio che le fa sovrapporre)

## A gara finita ...

Potrai trovare tutto il materiale didattico dello stage (**lezioni**, **testi gare**, **risultati**) linkato alla pagina:

<http://www.problemisvolti.it/ZStageMateriale.html>

## Info Campionato Urbi et Orbi

Le squadre iscritte al Campionato Urbi et Orbi devono partecipare a questa gara con lo stesso nome con cui si sono registrate al Campionato, in modo che a fine gara io possa aggiornare correttamente la classifica.

Le squadre non iscritte al Campionato sono invitate a NON usare come nomi di squadra quelli già presenti in classifica.

La classifica aggiornata del Campionato è linkata alla pagina dello stage:

<http://www.problemisvolti.it/StageOlimpiadiMatematica.html>