

Roma, 30 Ottobre 2020

Campionato Urbi et Orbi - Geometria

I parte: Geometria Piana

1. Il triangolo ABC ha area 210. Senza cambiare l'ampiezza dell'angolo \widehat{A} , si raddoppia la misura del lato AB e si triplica quella di AC . Qual è la nuova area di ABC ?
2. [Assisi Summer School 2019] Dato un quadrilatero $ABCD$ indichiamo con O il punto di intersezione delle sue diagonali. Sappiamo che $\angle BOC = 97^\circ$, $\angle ABO = 60^\circ$, $\angle DAO = 30^\circ$, $\angle CDO = 37^\circ$. Quanto vale l'ampiezza dell'angolo BCD ?
3. In un trapezio isoscele una diagonale è inclinata di 45° rispetto alle basi e misura 84cm. Quanto vale (in cm^2) l'area del trapezio?
4. [Assisi Summer School 2019] L'esagono convesso $ABCDEF$ è inscritto in una circonferenza. Se gli angoli interni in A e in C misurano rispettivamente 112° e 137° , quanto misura, in gradi, l'angolo interno in E ?
5. [Assisi Summer School 2018] L'esagono convesso $ABCDEF$ è circoscritto alla circonferenza γ . Inoltre è noto che $AB = 100\text{cm}$, $BC = 94\text{cm}$, $CD = 63\text{cm}$, $DE = 17\text{cm}$ e $EF = 16\text{cm}$. Qual è la misura, espressa in centimetri, di FA ?
6. Le diagonali del quadrilatero convesso $ABCD$ si intersecano nel punto P . Dire quanto vale, in gradi, la somma dei suoi angoli interni \widehat{A} e \widehat{B} , sapendo che i triangoli APB , BPC e CPD hanno aree rispettivamente 150, 600 e 150. Se si ritiene che i dati non siano sufficienti a rispondere, dare come risposta 0.
7. Del triangolo ABC sappiamo che $AB = 77$, $BC = 123$ e $CA = 130$. Sia P un punto interno al triangolo (in particolare P non sta sui lati) e sia S la somma delle distanze di P dai 3 lati del triangolo. Quanti diversi valori interi può assumere S ?
8. [Gara Tor Vergata 2016] Nel piano cartesiano la retta $y = x$ interseca l'ellisse $\frac{x^2}{576} + \frac{y^2}{441} = 1$ nei punti P e Q . Calcolare l'area del quadrilatero $ABCD$ circoscritto all'ellisse e tale che BC e DA sono paralleli a PQ mentre AB e CD sono tangenti all'ellisse rispettivamente nei punti P e Q .
9. Il quadrilatero convesso $ABCD$ ha l'area di 1cm^2 ed inoltre sappiamo che $BC = 2AB$ e $CD = 2DA$. Si prolunghi il lato AB di un segmento $BB' = 31AB$, il lato BC di un segmento $CC' = 23BC$, il lato CD di un segmento $DD' = 31CD$ e il lato DA di un segmento $AA' = 23DA$. Quanto vale in cm^2 l'area di $A'B'C'D'$?
10. Le tre altezze del triangolo ABC misurano 840 mm, 728 mm e 780 mm. Trovare la sua area espressa in cm^2 .
11. Dato un triangolo ABC , rettangolo in A , si costruisca un rettangolo $BB'C'C$ sull'ipotenusa BC , esternamente al triangolo. Siano $B'' = BC \cap AB'$ e $C'' = BC \cap AC'$. Sapendo che $BB'' = 18$, $CC'' = 50$ e $B''C'' = 17$, determinare BB' .

12. [Disfida Urbi et Orbi 2018 - EGMO 2018] L'area di un triangolo ABC è un numero intero di 4 cifre, inoltre l'altezza condotta dal vertice A misura 99 e quella condotta da B misura 101. Quanti diversi valori può assumere l'area di ABC ?

13. [Assisi Summer School 2018] Sia dato nel piano un triangolo ABC con lati $AB = 13$, $BC = 14$ e $CA = 15$. Sia \mathcal{S} il luogo dei punti P del piano tale che la somma delle aree dei triangoli APB , BPC e CPA non superi il triplo dell'area di ABC . Qual è l'area di \mathcal{S} ?

14. Un triangolo ABC ha lati $AB = 14$, $BC = 12$ e $CA = 10$. Sia D un punto del lato BC tale che AD sia la bisettrice dell'angolo in A . La circonferenza ω circoscritta ad ABC interseca AD in un punto M diverso da A . Infine la circonferenza Ω di diametro DM interseca ω nel punto N diverso da M . Determinare il quadrato di AN .

II parte: Geometria Solida

15. Conveniamo di dire che due rette sghembe nello spazio sono *sorelle* se hanno distanza uguale a 1 e ciascuna di esse ha una parallela che è perpendicolare all'altra. Ora, se r e s sono *sorelle*, quante sono le rette dello spazio ad essere *sorelle* di entrambe?

16. Di una piramide irregolare con base ABC e vertice V conosciamo 2 dei 3 angoli in V delle 3 facce laterali: $\widehat{AVB} = 87^\circ$ e $\widehat{BVC} = 59^\circ$. Quanti sono i possibili valori interi per la misura, in gradi, dell'angolo \widehat{CVA} ?

17. [Assisi Summer School 2018] Una sfera è tangente a tutte le 5 facce di una piramide che ha vertice V e per base un quadrilatero convesso $ABCD$. Trovare la misura in gradi di \widehat{AVB} sapendo che $\widehat{BVC} = 37^\circ$, $\widehat{CVD} = 23^\circ$ e $\widehat{DVA} = 28^\circ$.

18. [Assisi Summer School 2018] Il monte *Del Piffero* ha la forma di una piramide: la base è un triangolo equilatero ABC e le tre facce laterali sono tre triangoli isosceli identici con vertice nella cima V . Inoltre ha la seguente proprietà: esiste un percorso lungo quanto lo spigolo laterale che, partendo dal punto A della base e rimanendo sempre sulla superficie laterale, fa un giro completo intorno alla montagna e ritorna al punto A . Qual è il massimo valore che può avere (espresso in gradi) l'angolo al vertice di ciascuna delle 3 facce laterali?

19. Una sfera \mathcal{S} è sospesa su una piazza e il sole ne proietta l'ombra a terra. Inizialmente l'ombra è un'ellisse di area 6325. Dopo un po' di tempo l'angolo formato dai raggi solari con la normale al suolo è aumentato di un angolo α tale che $\tan \alpha = \frac{5}{12}$ e nel frattempo l'area dell'ombra è diventata 7800. Quale sarebbe l'area dell'ombra se i raggi solari fossero perpendicolari al suolo?

20. In un tetraedro $ABCD$ le coppie di spigoli opposti sono uguali. Più precisamente sappiamo che $AB = CD = 35$ e $AC = BD = 44$, ma dei due restanti spigoli sappiamo solo che $AD = BC$ ma non ne conosciamo la lunghezza ℓ . Quanti sono i possibili valori interi per ℓ ?

21. Sia \mathcal{S} un ottaedro regolare di volume 5040, sia r la retta che passa per i centri di due facce opposte di \mathcal{S} e sia \mathcal{T} il solido che si ottiene ruotando \mathcal{S} di 180° attorno ad r , Trovare il volume di $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$.

Risposte dei Problemi

Problema 1	:	1260
Problema 2	:	113
Problema 3	:	3528
Problema 4	:	111
Problema 5	:	68
Problema 6	:	180
Problema 7	:	48
Problema 8	:	2016
Problema 9	:	1481
Problema 10	:	3549
Problema 11	:	150
Problema 12	:	5000
Problema 13	:	1092
Problema 14	:	175
Problema 15	:	4
Problema 16	:	117
Problema 17	:	42
Problema 18	:	20
Problema 19	:	6072
Problema 20	:	30
Problema 21	:	3990