

Campionato Urbi et Orbi - Algebra

I parte: problemi standard o comunque semplici

1. [Questione di Grado (I)] Sia $q(x) = p(p(p(x)))$ dove $p(x)$ è un polinomio. Dire qual è il grado di $q(x)$ sapendo che è compreso tra 100 e 200.

2. [Taglia la Corda (I)] Luca taglia una corda di 35 metri in 4 pezzi la cui lunghezza (in metri) è intera. Quanto vale, al massimo, il prodotto delle misure di tutti i pezzi?

3. [Taglia la Corda (II)] Luca taglia una corda di 35 metri in 4 pezzi la cui lunghezza (in metri) può anche non essere intera. Qual è il massimo valore intero che si può ottenere come prodotto delle misure di tutti i pezzi?

4. [Missione su Marte] Luca e Samantha, i due astronauti che l'*Agenzia Spaziale Italiana* ha mandato su Marte nel 2025, fanno l'inventario del cibo rimasto in previsione del loro rientro sulla Terra. Hanno calcolato che se Luca fosse da solo il cibo gli basterebbe per 924 giorni mentre, se fosse da sola Samantha che è più minuta, il cibo le basterebbe per 1617 giorni. Mangiando entrambi, per quanti giorni durerà il cibo?

5. [Gita a Grassopoli] La famiglia *Stecchino* (mamma, papà e figliolo) va in vacanza a *Grassopoli*, dove le bilance pubbliche funzionano gratis solo per pesi maggiori o uguali a 100Kg. Per pesi inferiori si paga. Decidono allora di pesarsi a coppie e trovano che:

- mamma e papà pesano insieme esattamente 132Kg;
- papà e figliolo pesano insieme esattamente 115Kg;
- mamma e figliolo, invece, insieme pesano troppo poco e la bilancia non fornisce il servizio gratis.

Allora saltano tutti e tre insieme sulla bilancia. Qual è il massimo valore intero che potrebbe comparire sul display?

6. [Supersimmetrie] I numeri reali x ed y sono tali che $xy + x + y = 13$ e $x^2y + xy^2 = 40$. Quanto vale $x^4 + y^4$?

7. [Viva la Differenza! (I)] Due delle soluzioni dell'equazione $x^3 - 91x + 330 = 0$ hanno differenza 1. Qual è la loro somma?

8. [Personal Computer] La prof.ssa Celletti, direttore del dip. di Matematica dell'Università di Roma *Tor Vergata*, deve sommare tra loro 230 numeri molto grandi ma ha rotto il computer. Chiede allora aiuto ai colleghi di dipartimento, che sono 80. Decidono che ciascuno di loro, se al mattino riceve una mail dal direttore contenente due numeri, si impegna a scrivere entro la mezzanotte una mail di risposta contenente la somma dei due numeri ricevuti. Quanti giorni servono, al minimo, per calcolare la somma dei 230 numeri?

9. [Sommare Senza Sommare (I)] Trovare la somma dei quadrati di tutte le soluzioni reali dell'equazione $x^3 - 24x^2 + 77x + 294 = 0$.

10. **[Questione di Grado (II)]** Sia $q(x) = p(p(p(x)))$ dove $p(x)$ è un polinomio. Sappiamo solo che $p(x)$ ha grado 8 e che x^9 divide $q(x)$. Qual è il massimo intero k tale che sicuramente anche x^{9+k} divide $q(x)$.

II parte: altri problemi

11. **[Mal di Calcoli]** Presa $g(x) = \frac{1}{2-2x}$, definiamo una sequenza di numeri A_n nel modo seguente: $A_1 = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}$ e per ogni n intero positivo $A_{n+1} = g(A_n)$. Trovare il reciproco del prodotto $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_{24}$.

12. **[Grosso Coefficiente Cercasi]** Sviluppando $(x + y + z)^{10}$ e sommando tra loro i termini simili si ottiene un polinomio in 3 variabili. Qual è il più grande dei suoi coefficienti?

13. **[Sommare Senza Sommare (II)]** Del polinomio $p(x)$ sappiamo che esiste una costante A tale che $(x + 1)p(x) = x^{20} + 2x^{19} + 3x^{18} + \dots + 20x + A$. Trovare la somma dei coefficienti di $p(x)$.

14. **[Taglia la Corda (III)]** Luca taglia una corda di 35 metri in tanti pezzi la cui lunghezza (in metri) è intera. Quanto vale, al massimo, il prodotto delle misure di tutti i pezzi? (Dare come risposta le 4 cifre più basse del risultato)

15. **[Massimo il Massimizzatore]** Massimo deve trovare 5 numeri interi e strettamente positivi, tutti diversi, in modo che il loro prodotto sia 3600 e che il prodotto dei loro fattoriali sia il massimo possibile. Quanto vale la somma dei 5 numeri?

16. **[Viva la Differenza! (II)]** Dell'equazione $x^3 - 10x^2 + 19x + A = 0$ non conosciamo il coefficiente A . Sappiamo solo che A è intero e che l'equazione ha due soluzioni che hanno differenza 1. Quanto vale A ?

17. **[Polinomio a Sorpresa]** Dire quanti sono i polinomi a coefficienti reali $p(x)$ che soddisfano l'identità $p(p(x)) = \frac{(p(x))^3 - 2}{3}$.

18. **[Non È La Scuola]** Risolvendo il sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} x^3 + 5x^2 - 11x + 1 > 0 \\ x^{22} + x^{11} + 1331x > 11\sqrt{x^2 - x - 56} \\ \sqrt{6 - \sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt{5 - \sqrt[3]{x}}} > \frac{20}{x+2} \end{cases}$$

Claudia trova come soluzione un insieme \mathcal{S} e lo scrive come unione di una famiglia finita di intervalli disgiunti. Qual è la somma delle lunghezze di tali intervalli?

19. **[Taglia la Corda (IV)]** Luca taglia una corda di 35 metri in tanti pezzi le cui lunghezze (in metri) sono intere e tutte diverse tra loro. Quanto vale, al massimo, il prodotto delle misure di tutti i pezzi? (Dare come risposta le 4 cifre più basse del risultato)

20. [Sempre in Mezzo] Siano m e n due numeri positivi tali che

$$\frac{2016}{2017} < \frac{m}{n} < \frac{2017}{2018}.$$

Qual è il valore minimo che può assumere la somma $m + n$?

21. [Taglia la Corda (V)] Luca taglia una corda di 35 metri in tanti pezzi la cui lunghezza (in metri) può anche non essere intera. Quanti devono essere i pezzi se vuole che il loro prodotto sia massimo?

22. [Pensieri Contorti] Posto che $\lfloor \dots \rfloor$ significa "parte intera di...", si consideri la disuguaglianza:

$$71 + 42(\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor) < C + 17(\sqrt{k} - \lfloor \sqrt{k} \rfloor)$$

dove n , k e C sono interi strettamente positivi. Trovare C in modo che non esista alcun k che la renda vera per ogni n e tuttavia per ogni n esistano infiniti k che la rendono vera.

23. [Massimo il Minimizzatore] Massimo deve trovare 4 numeri positivi x , y , z e w in modo che il loro prodotto sia 18^4 e che il valore dell'espressione $(x + y^2 + z^3)(w^2 + 6)$ sia il minimo possibile. Che valore deve scegliere per x ?

24. [Taglia la Corda (The Game)] Il gioco, che si svolge tra Claudia e Luca, inizia mettendo sul tavolo un pezzo di corda di 35 metri. In seguito, ciascuno dei due giocatori, a turno, cominciando da Luca, fa la seguente mossa: se sul tavolo ci sono meno di 4 pezzi di corda, ne prende uno a sua scelta tra quelli lunghi almeno 2 metri, lo taglia in due pezzi di lunghezza intera positiva e li rimette sul tavolo. Quando sul tavolo ci sono 4 pezzi di corda il gioco termina: si calcola il prodotto delle loro lunghezze e il numero che si ottiene rappresenta la cifra (espressa in Euro) che Luca deve dare a Claudia. Ovviamente Luca gioca in modo che la cifra da pagare alla fine sia la minima possibile mentre Claudia in modo che sia massima. A gioco finito, quanti Euro dovrà pagare Luca?

A gara finita ...

Soluzioni e commenti ai problemi e classifica saranno linkati alla pagina:

<http://www.problemisvolti.it/ZStageCalendario.html>

Risposte dei Problemi

Problema 1	:	125
Problema 2	:	5832
Problema 3	:	5861
Problema 4	:	588
Problema 5	:	173
Problema 6	:	2866
Problema 7	:	11
Problema 8	:	9
Problema 9	:	422
Problema 10	:	18
Problema 11	:	4096
Problema 12	:	4200
Problema 13	:	110
Problema 14	:	4294
Problema 15	:	160
Problema 16	:	30
Problema 17	:	3
Problema 18	:	117
Problema 19	:	0320
Problema 20	:	8068
Problema 21	:	13
Problema 22	:	96
Problema 23	:	648
Problema 24	:	272