

Campionato Urbi et Orbi - Gara di Combinatoria

A cura di: E. Callegari, S. Claudì, P. De Falco, S. Pieri, M. Sabatini.

1. [A Sandro] In quanti modi, permutando la prima riga di caselle, si può ottenere la seconda:

¹ S	² A	³ N	⁴ D	⁵ R	⁶ O	⁷ -	⁸ C	⁹ A	¹⁰ M	¹¹ P	¹² I	¹³ G	¹⁴ O	¹⁵ T	¹⁶ T	¹⁷ O
C	A	M	P	I	G	O	T	T	O	-	S	A	N	D	R	O

2. [ITTITI (I)] Mettendo in ordine alfabetico tutti gli anagrammi di **ITTITI**, in prima posizione si trova **IIITTT**. In che posizione si trova **TIHITT**?

3. [Cubo colorato] Ogni faccia di un cubo viene colorata di giallo o di rosso. Quanti diversi cubi colorati posso ottenere? Due colorazioni che si possono ottenere l'una dall'altra con rotazioni vanno considerate uguali e quindi contate una sola volta.

4. [Tabella ordinata (I)] In ogni casella di una tabella 2×7 scriviamo un intero tra 1 e 8 in modo che ogni numero sia strettamente maggiore sia di quello della casella alla sua sinistra che di quello della casella che gli sta sotto. In quanti modi si può farlo?

5. [Contrattempi] **Sonia:** - Emanuele! Non hai portato i documenti alla segreteria del *Landi*!
Emanuele: - Era finita la benzina. Avevo una gomma a terra. Non avevo soldi per il taxi. La tintoria non mi aveva portato il vestito. C'era il funerale di mia madre. Era crollata la casa. C'è stato il terremoto, una tremenda inondazione, le cavallette! Non è stata colpa mia!
Sonia: - Ma tutti questi guai ti sono capitati in quest'ordine?
Emanuele: - Ricordo che le cavallette erano le ultime e che quando la casa è crollata sapevo già che la tintoria non avrebbe portato il vestito ma avevo ancora i soldi per il taxi.
 Quante sono le sequenze di eventi compatibili con i ricordi di Emanuele?

6. [ITTITI (II)] Tra tutti i possibili modi di permutare 6 lettere tra 6 posizioni, quanti sono quelli che applicandoli alla parola **ITTITI** la cambiano?

7. [Mal di denti] La ditta *SpakkaDent* vende confezioni di caramelle assortite al gusto di limone, fragola, arancia o pesca. Ogni confezione contiene esattamente 14 caramelle ma di ogni gusto la quantità può variare: viene garantito solo che ogni confezione contiene tutti i gusti. Quanti diverse confezioni possono esistere?

8. [Piccoli gruppi (I)] Piero, allenatore di *Quelli del Pepe*, ha scoperto che i suoi studenti lavorano meglio se suddivisi in gruppi molto piccoli, ma non da soli. Decide quindi di raggruppare i suoi 10 studenti in 5 gruppi da 2. In quanti modi può farlo?

9. [Tabella ordinata (II)] In ogni casella di una tabella 2×7 scriviamo un intero tra 1 e 9 in modo che ogni numero sia strettamente maggiore sia di quello della casella alla sua sinistra che di quello della casella che gli sta sotto. In quanti modi si può farlo?

10. [Passatempo per ricchi] Claudia ha 3 tipi di monete, tutte del diametro di 3 cm: quelle d'oro, spesse 2 mm, quelle d'argento, spesse 3 mm e quelle di bronzo, spesse 4 mm. Di ogni tipo ne ha tantissime (almeno 12). In quanti modi diversi può fare una pila di monete alta 24 mm, usando, se vuole, anche monete non tutte uguali tra loro?

11. [Cambiare tutto per non cambiare niente] Detto $A = \{1, 2, \dots, 7\}$, quante sono le funzioni $f : A \rightarrow A$ tali che $f(f(n)) = n$ per ogni n di A ?

12. [Tanto saltare per nulla] Una pulce, partendo da un vertice di un cubo fa una sequenza di 2020 salti: ad ogni salto, passa da un vertice all'altro scegliendo a caso tra i tre vertici più vicini. Qual è la probabilità \mathcal{P} che la sua posizione finale sia diversa da quella di partenza? Dare come risposta le prime 4 cifre decimali di \mathcal{P} .

13. [Piccoli gruppi (II)] Anche Simona, che allena i *Mi sembrava ovvio*, e Michelangelo, che allena il *GalileiTR*, seguono l'esempio di Piero e raggruppano i loro ragazzi a due a due (se fossero dispari uno sta da solo). Detti m i ragazzi di Simona e n quelli di Michelangelo, sappiamo che il numero di modi diversi in cui Simona può raggruppare i suoi ragazzi è 63 volte quello di Michelangelo. Per quante coppie (m, n) di interi strettamente positivi è possibile?

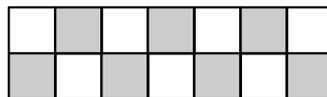
14. [ITTITI (III)] La parola \mathcal{P} ha la seguente proprietà: comunque si prenda un anagramma di **ITTITI** si può ottenerlo da \mathcal{P} cancellando qualche lettera. Quante lettere ha \mathcal{P} al minimo?

15. [Questione di ordine] Stefania somministra agli 8 membri della sua squadra (il *San Francesco*) due prove (geometria e combinatoria) in ciascuna delle quali si ottiene come punteggio un numero reale x compreso tra 0 e 50. Sommando i punteggi delle due prove, 2 ragazzi risultano a parimerito a 60 punti, poi ce ne sono 3 a 50 punti e infine 3 a 40 punti. Allora Stefania fa una nuova classifica usando, non la somma dei punteggi delle due prove, ma la somma dei loro quadrati. Quanti diversi ordinamenti senza parimerito può ottenere?

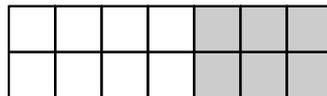
16. [TATTICA a blocchi] La parola **TATTICA** contiene la sequenza **TA**, cioè c'è almeno una **T** che è subito seguita da una **A**. Quanti sono i suoi anagrammi che hanno questa proprietà?

17. [ITTITI (IV)] Di tutti i modi di permutare 6 lettere tra 6 posizioni, quanti sono quelli che applicati una volta alla parola **ITTITI** la cambiano mentre applicati due volte no?

18. [Tabella disordinata] Mettiamo gli interi tra 1 e 14 in una tabella 2×7 , uno in ogni casella, in modo che i pari siano nelle caselle bianche e i dispari in quelle grigie (vedi figura). In quante di queste distribuzioni di numeri, succede che per ogni $k = 1, \dots, 7$ i numeri $2k - 1$ e $2k$ stanno in caselle con un lato in comune? Dare come risposta le ultime 4 cifre del risultato.



19. [Tabella ordinata (III)] In ogni casella di una tabella 2×7 scriviamo un intero diverso, compreso tra 1 e 16, in modo che il numero di ogni casella sia maggiore sia di quello della casella alla sua sinistra che di quello della casella che gli sta sotto. Quanti sono i modi di farlo nei quali tutti i numeri delle caselle grigie (vedi figura) sono maggiori di quelli delle caselle bianche?



20. [La potenza del Lato Oscuro] Il maestro Jedi **Paul von Blumen**, allenatore del *Golgi*, è passato al *Lato Oscuro* e sottopone i suoi allievi ad un duro training, che descrive in *Daf Buch*. L'ultima prova superata dai ragazzi è la seguente: di tutte le 7-uple (m_1, \dots, m_7) di interi non minori di 100 tali che $m_1 + \dots + m_7 = 742$, devono trovare quelle **livellabili**. Una 7-upla si dice **livellabile** se si può trasformarla nella 7-upla $(106, 106, \dots, 106)$ sommandole delle 7-uple ottenute permutando $(3, 3, 3, 3, -4, -4, -4)$. Quante sono le 7-uple **livellabili**?

21.

[Pulce ammaestrata] Diamo un indice da 0 a 9 a ciascuna delle dieci caselle di una riga

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

poi in ogni casella mettiamo un numero intero a caso tra 0 e 9, ad esempio:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	8	7	0	1	4	1	0	7

Una pulce salta tra le caselle con questa regola: *ad ogni salto l'indice della casella di arrivo coincide col numero contenuto nella casella di partenza.* In particolare se parte da una casella in cui è scritto un numero uguale al suo indice, la pulce fa un salto sul posto.

Con le caselle riempite come nel nostro esempio succede una cosa strana: ogni sequenza di due salti termina nella casella con indice 0 se quella di partenza ha indice pari mentre termina nella casella con indice 1 se quella di partenza ha indice dispari.

Quanti sono i modi di riempire le caselle che hanno questa proprietà?

Soluzioni e Classifica su:

<http://www.problemisvolti.it/ZStageCalendario.html>

Per allenarsi in Combinatoria...

Molti dei problemi di questa gara sono liberamente tratti da:

IL LIBRO

ovvero

E. Callegari, *Combinatoria per problemi*, Scienza Express edizioni, 2021.

Molto utile per allenarsi è anche:

Das Buch

ovvero

P. Fiorini, *Manuale di allenamento per le gare di matematica*, Scienza Express edizioni, 2021.

Entrambi sono acquistabili su Amazon oppure sul sito dell'editore:

<https://scienzaexpress.it>

Risposte dei Problemi

Problema 1	:	24
Problema 2	:	11
Problema 3	:	10
Problema 4	:	1
Problema 5	:	6720
Problema 6	:	684
Problema 7	:	286
Problema 8	:	945
Problema 9	:	36
Problema 10	:	3505
Problema 11	:	232
Problema 12	:	7499
Problema 13	:	8
Problema 14	:	11
Problema 15	:	4032
Problema 16	:	300
Problema 17	:	108
Problema 18	:	5840
Problema 19	:	8400
Problema 20	:	1716
Problema 21	:	5778