Stage Urbi et Orbi - Exe. 5

20 dicembre 2018 (16.30-18.00) - docente: Prof. **Roberto Tauraso** - Università di Roma *Tor Vergata*

APPROCCIO RICORSIVO IN COMBINATORIA
ALCUNI PROBLEMI DELLA GARA

PROBLEMA 4 TROVARE IN QUANTI MODI IL NUMERO 14 SI PUÒ SCRIVERE COME SOMMA DEI NUMERI 1 E 2 TENENDO CONTO DELL'ORDINE.

SIA a_n IL NUMERO DI MODI PER SCRIVERE n NEL MODO DESCRITTO. ALLORA

$1=1 \Rightarrow a_1=1$, $2=2=1+1 \Rightarrow a_2=2$

$3=1+1+1=1+2=2+1 \Rightarrow a_3=3$

INOLTRE SE $n\geq 3$ ALLORA DATO CHE L'ULTIMO ADDENDO NELLA SOMMA PUÒ ESSERE 1 O 2 NE SEGUE CHE VALE LA RICORSIONE

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

E QUINDI SI PUÒ CONCLUDERE CHE $a_n = F_{n+1}$ DOVE F_k DENOTA IL K-ESIMO NUMERO DI FIBONACCI.

COSÌ LA RISPOSTA È $F_{14+1} = F_{15} = \boxed{610}$.

OSSERVAZIONE NEL PROBLEMA PRECEDENTE I MODI DI SCRIVERE UN INTERO POSITIVO n COME SOMME DI 1 E 2 SONO CORRISPONDENTI AI MODI DI RICOPRIRE UNA STRISCIA $1\times n$

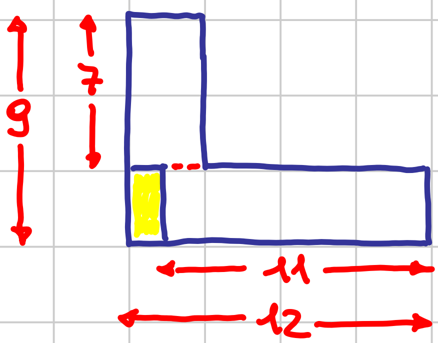
CON UN QUADRATO 1×1 O UN DOMINO 1×2 .

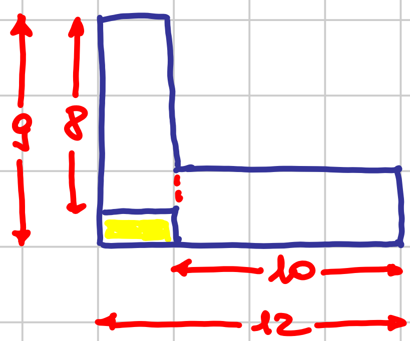
TALE CORRISPONDENZA VALE ANCHE CON I RICOPRIMENTI DEL RETTANGOLO $2 \times m$ CON SOLO I DOMINO (SI VEDA LA LEZIONE 5).

$\boxed{\text{PROBLEMA 14}}$ DA UN PAVIMENTO RETTANGOLARE ABCD COI LATI AB DI 12m E BC DI 9m, TOLGO UNA ZONA RETTANGOLARE APQR, TUTTA CONTENUTA IN ABCD E CON I LATI AP DI 10m E AR DI 7m.

CIÒ CHE RIMANE È UNA REGIONE PBCDRQ A FORMA DI "ELLE", CHE BISOGNA RICOPRIRE CON 19 LASTRE DI MARMO RETTANGOLARI DELLE DIMENSIONI 1m×2m. IN QUANTI MODI DIVERSI POSSO FARLO?

OGNI RICOPRIMENTO DEL PAVIMENTO È DI UNO DEI DUE SEGUENTI TIPI: NELL'ANGOLO IN BASSO A SINISTRA POSSIAMO METTERE UNA PIASTRELLA "DOMINO" IN DUE MODI POSSIBILI





NEL PRIMO CASO LE DUE PARTI RIMANENTI, UN RETTANGOLO 7x2 E UN RETTANGOLO 2x11, PER L'OSSERVAZIONE PRECEDENTE, POSSONO ESSERE RICOPERTE IN

$$F_8 \cdot F_{12} = 21 \cdot 144 = 3024 \text{ MODI.}$$

NEL SECONDO CASO LE DUE PARTI RIMANENTI, UN RETTANGOLO 8x2 E UN RETTANGOLO 2x10, POSSONO ESSERE RICOPERTE IN

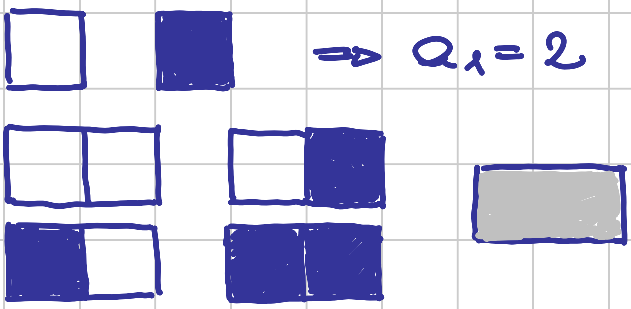
$$F_9 \cdot F_{11} = 34 \cdot 89 = 3026 \text{ MODI.}$$

QUINDI LA RISPOSTA È LA SOMMA DI QUESTI DUE NUMERI

$$3024 + 3026 = \boxed{6050}.$$

PROBLEMA 8 IN QUANTI MODI DIVERSI SI PUÒ TASSELLARE UNA STRISCIA DI 10 QUADRATI USANDO QUADRATI DI COLORE BIANCO O NERO E UN DOMINO DI COLORE GRIGIO?

SIA Q_n IL NUMERO DI RICOPRIMENTI DELLA STRISCIA DI n QUADRATI. ALLORA



$n=1 \Rightarrow Q_1 = 2$

$n=2 \Rightarrow Q_2 = 5$

PER $n \geq 3$ NELLA PARTE FINALE DI OGNI RICOPRIMENTO PUÒ ESSERCI UN QUADRATO

BIANCO (E IL RESTO SI RICOPRE IN a_{n-1} MODI), O UN QUADRATO NERO (E IL RESTO SI RICOPRE IN a_{n-1} MODI) O UN DOMINO GRIGIO (E IL RESTO SI RICOPRE IN a_{n-2} MODI). COSÌ PER $n \geq 3$ VALE LA RICORSIONE

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}.$$

TALE RICORSIONE PERMETTE DI TROVARE a_{10}.

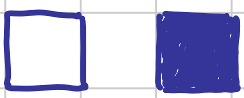
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	2	5	12	29	70	169	408	985	2378	5741

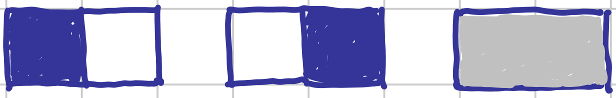
QUINDI LA RISPOSTA È $\boxed{5741}$.

PROBLEMA 13 VOGLIAMO TASSELLARE UNA STRISCIA DI 10 QUADRATI COME NEL PROBLEMA 8 MA FACENDO IN MODO CHE TASSELLI VICINI SIANO SEMPRE DIVERSI. IN QUANTI MODI POSSIAMO FARLO?

SIANO w_n, b_n E g_n IL NUMERO DI RICOPRIMENTI DELLA STRISCIA DI LUNGHEZZA n CHE FINISCONO RISPETTIVAMENTE CON UN QUADRATO BIANCO, UN QUADRATO NERO O UN DOMINO GRIGIO.

ALLORA SI VERIFICA FACILMENTE CHE

$n=1$  $\Rightarrow$ $w_1=1,\ b_1=1,\ g_1=0$

$n=2$  $\Rightarrow w_2=1,\ b_2=1,\ g_2=1$

PER $n \geq 3$, RAGIONANDO COME PRIMA SULLA PARTE FINALE DEL RICOPRIMENTO, E RICORDANDO CHE TASSELLI VICINI DEVONO ESSERE DIVERSI, SI VERIFICA CHE

$$\begin{cases} w_n = b_{n-1} + g_{n-1} \\ b_n = w_{n-1} + g_{n-1} \\ g_n = b_{n-2} + w_{n-2} \end{cases}$$

NOTIAMO CHE PER SIMMETRIA $w_n = b_n$ E COSÌ

$$\begin{cases} b_n = b_{n-1} + g_{n-1} \\ g_n = 2b_{n-2} \end{cases}$$

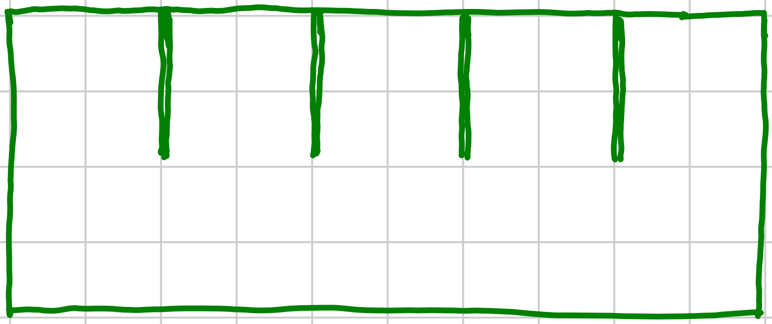
ORA PASSIAMO AL CALCOLO

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$w_n = b_n$	1	1	2	4	6	10	18	30	50	86
g_n	0	1	2	2	4	8	12	20	36	60

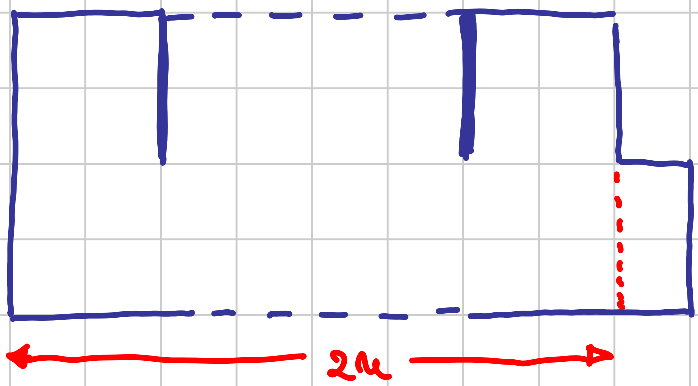
DATO CHE IL NUMERO TOTALE DI RICOPRIMENTI È $w_n + b_n + g_n$, LA RISPOSTA È

$$w_{10} + b_{10} + g_{10} = 86+86+60 = \boxed{232}.$$

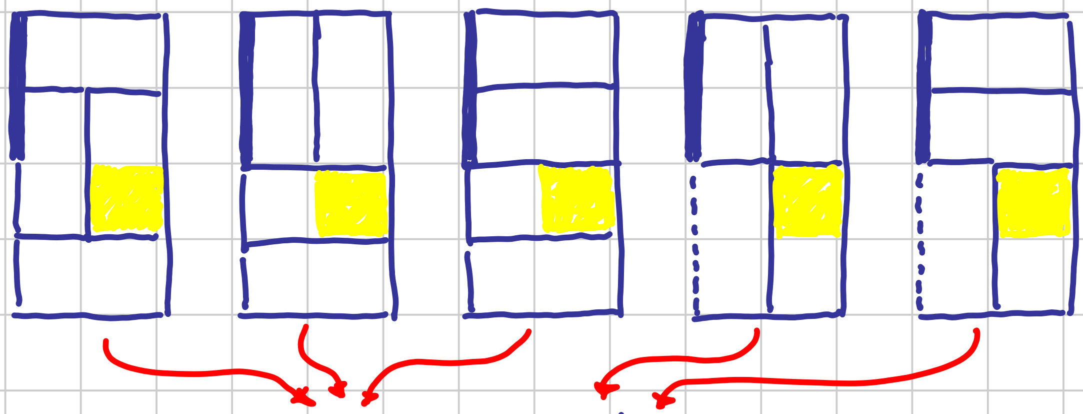
PROBLEMA 24 TROVARE IN QUANTI MODI DIVERSI È POSSIBILE RICOPRIRE LA SEGUENTE GRIGLIA 4×10 CON TESSERE DEL DOMINO CON LA RESTRIZIONE CHE LE TESSERE NON POSSONO ESSERE MESSE A CAVALLO DEI 4 SEGMENTI VERTICALI IN GRASSETTO.



CONSIDERIAMO IL PROBLEMA PIÙ GENERALE DI CONTARE I RICOPRIMENTI DELLA GRIGLIA $4\times 2n$ UNIONE DI n RETTANGOLI 4×2 CON $n-1$ SEGMENTI VERTICALI IN GRASSETTO.
SIA a_n IL NUMERO DI TALI RICOPRIMENTI.
NOI DOBBIAMO DETERMINARE a_5.
INOLTRE SARÀ UTILE CONSIDERARE ANCHE IL NUMERO DI RICOPRIMENTI b_n DELLA GRIGLIA $4\times 2n$ CON UNA SPORGENZA 2×1 IN BASSO A DESTRA

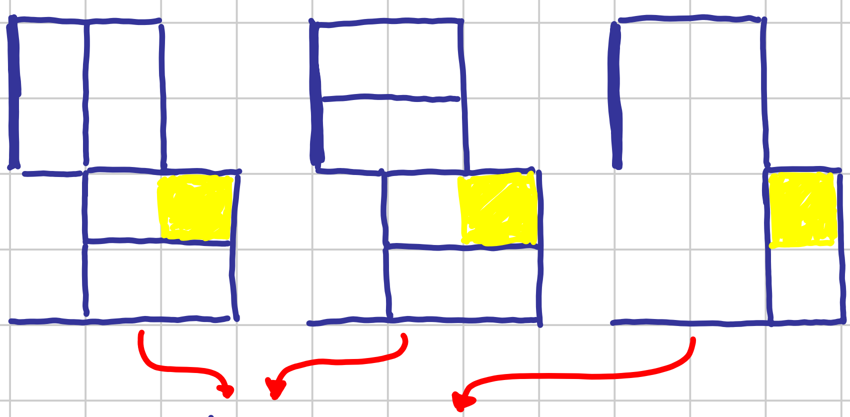


NOTIAMO CHE a_1 È IL NUMERO DI RICOPRIMENTI CON DOMINO DI UN RETTANGOLO 4×2 OSSIA $F_5 = 5$. È FACILE VERIFICARE CHE $b_1 = 7$.
ADESSO DETERMINIAMO DELLE RICORSIONI RELATIVE ALLE SEQUENZE a_n E b_n IN MODO DA RIUSCIRE A CALCOLARE I NUMERI SEGUENTI.
DATO UN RICOPRIMENTO CONTATO DA a_n E OSSERVANDO COME È COPERTO IL QUADRATO EVIDENZIATO IN GIALLO NELLA PARTE FINALE DELLA GRIGLIA, ABBIAMO CHE PER $n \geq 2$



QUINDI $\quad a_n = 3a_{n-1} + 2b_{n-1}$

IN MODO ANALOGO, PARTENDO DA UN RICOPRIMENTO CONTATO DA b_n, PER $n \geq 2$



QUINDI $\quad b_n = 2b_{n-1} + a_n$.

COSÌ PER $n \geq 2$

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 2b_{n-1} \\ b_n = 2b_{n-1} + a_n \end{cases}$$

E PARTENDO DAI VALORI NOTI $a_1 = 5$ E $b_1 = 7$ OTTENIAMO

n	1	2	3	4	5
a_n	5	29	173	1037	6221
b_n	7	43	259	1555	

E LA RISPOSTA È $a_5 = \boxed{6221}$.