

Stage Urbi et Orbi - Lez. 5

Titolo nota

7 dicembre 2018 (15.00-18.00) - docente: Prof. Roberto Tauraso - Università di Roma Tor Vergata

APPROCCIO RICORSIVO ALLA COMBINATORIA

INIZIAMO CON QUALCHE ESEMPIO "NOTO".

ESEMPIO 1.

PER DETERMINARE IL NUMERO p_m DI PERMUTAZIONI DI m ELEMENTI DISTINTI BASTA OSSERVARE CHE $p_1 = 1$ E SE $m \geq 2$ ALLORA, UNA VOLTA SCELTO TRA GLI m ELEMENTI QUELLO DA METTERE NELLA PRIMA POSIZIONE, IL RESTO È UNA PERMUTAZIONE DEGLI $m-1$ ELEMENTI CHE SONO RIMASTI. DUNQUE VALE LA SEGUENTE RELAZIONE RICORSIVA

$$p_m = m \cdot p_{m-1}.$$

COSÌ DA p_1 POSSIAMO CALCOLARE

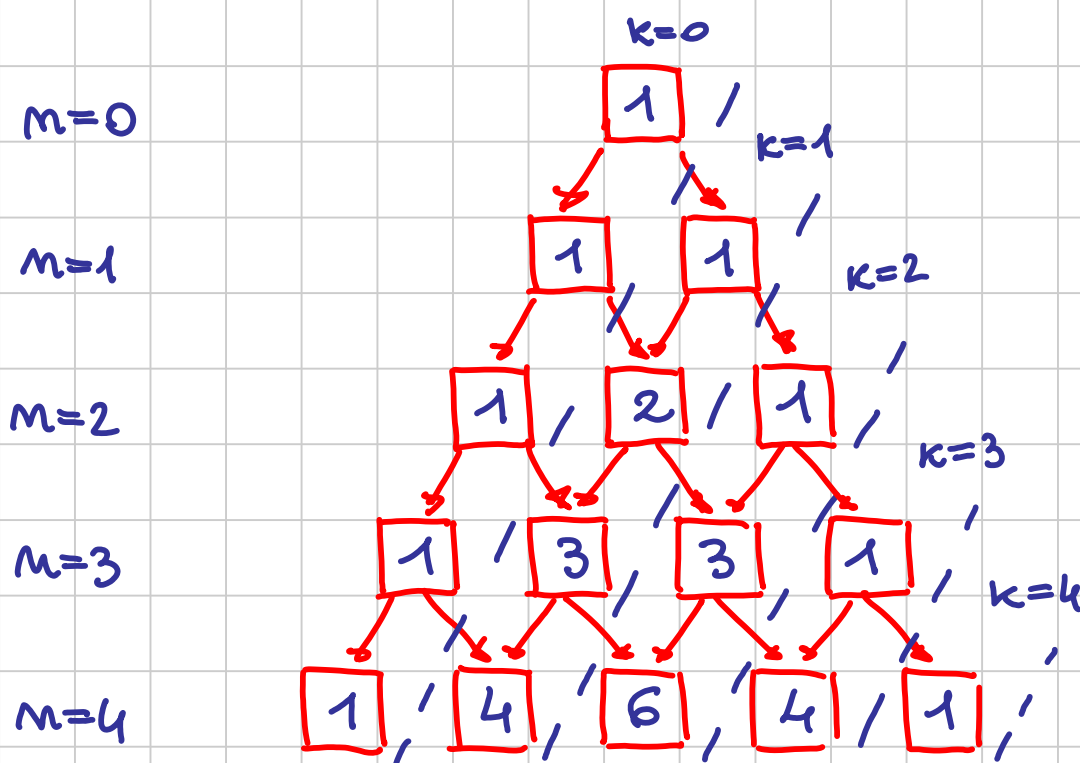
$$p_2 = 2 \cdot p_1 = 2, \quad p_3 = 3 \cdot p_2 = 3 \cdot 2 = 6$$

$$p_4 = 4 \cdot p_3 = 4 \cdot 6 = 24, \quad p_5 = 5 \cdot p_4 = 120.$$

IN GENERALE $p_m = m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = m!$.

ESEMPIO 2.

IL TRIANGOLO DI TARTAGLIA-PASCAL-HUI
E' UNO SCHEMA DI NUMERI CHE SI GENERA
PARTENDO DA 1 E AD OGNI PASSO SI
AGGIUNGE UNA RIGA DOVE OGNI NUMERO
E' LA SOMMA DEI DUE NUMERI IMMEDIATA-
MENTE SOPRA NELLA RIGA PRECEDENTE



SE INDICHIAMO IL NUMERO NELLA RIGA $m \geq 0$
E COLONNA k DOVE $0 \leq k \leq m$ CON $Q(m, k)$
ALLORA

$$Q(m, 0) = Q(m, m) = 1 \quad \text{PER OGNI } m \geq 0$$

E VALE LA RELAZIONE RICORSIVA

$$Q(m, k) = Q(m-1, k-1) + Q(m-1, k)$$

DOVE $1 \leq k \leq m$.

SI NOTI CHE

$$a(m, k) = \binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

E RICORDANDO CHE $\binom{m}{k}$ È IL NUMERO DI SOTTOINSIEMI DI $\{1, 2, \dots, m\}$ DI CARDINALITÀ k , LA RELAZIONE RICORSIVA HA UN'INTERPRETAZIONE COMBINATORIA

$$\binom{m}{k} = \binom{m-1}{k-1} + \binom{m-1}{k}$$

NUMERO DI
SOTTOINSIEMI
DI $\{1, \dots, m\}$
DI k ELEMENTI

NUMERO DI
SOTTOINSIEMI
DI $\{1, \dots, m\}$
DI k ELEMENTI
CHE CONTENGONO
L'ELEMENTO m

NUMERO DI
SOTTOINSIEMI
DI $\{1, \dots, m\}$
DI k ELEMENTI
CHE NON CONTENGONO
L'ELEMENTO m

POSSIAMO DARE UN'INTERPRETAZIONE DEL TRIANGOLO DI TARTAGLIA ANCHE IN TERMINI DI CONTEGGIO DI PERCORSI.

5	1	6	21	56	126	252
4	1	5	15	35	70	126
3	1	4	10	20	35	56
2	1	3	6	10	15	21
1	1	2	3	4	5	6
0	1	1	1	1	1	1
R/c	0	1	2	3	4	5

IL NUMERO DI PERCORSI CHE PARTONO DALLA CASELLA (0,0) FINO ALLA CASELLA (R,c) CON MOSSE $\rightarrow$ o $\uparrow$ SONO

$$\binom{R+c}{R} = \binom{R+c}{c}$$

AD ESEMPIO SE $(R, c) = (5, 4)$

$$\binom{5+4}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126.$$

ESEMPIO 3.

LA SUCCESSIONE DI FIBONACCI È DEFINITA CONE

$$\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ PER } n \geq 2 \end{cases}$$

I PRIMI NUMERI DI TALE SUCCESSIONE SONO

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F _n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

PROBLEMA 1.

CONTARE IL NUMERO DI SEQUENZE LUNGHE $n \geq 1$ FORMATE DA 0 E 1 DOVE GLI 1 NON COMPaiono MAI VICINI.

SE $n=1$ LE SEQUENZE SONO 0, 1

SE $n=2$ SONO 00, 01, 10

SE $n=3$ SONO 000, 001, 010, 100, 101

SIA Q_n IL NUMERO DI TALI SEQUENZE.

SE $n \geq 2$ ALLORA CI SONO DUE CASI POSSIBILI:

1) L'ULTIMO NUMERO È 0. IN TAL CASO IL RESTO SI PUÒ COMPLETARE IN Q_{n-1} MODI



2) L'ULTIMO NUMERO È 1. IN TAL CASO ACCANTO CI DEVE ESSERE UNO 0 E IL RESTO SI PUO' COMPLETARE IN Q_{n-2} MODI.

$$\underbrace{\quad \quad \quad}_{n-2} 01$$

COSI' ABBIAMO CHE

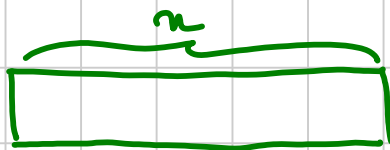
$$\begin{cases} Q_n = Q_{n-1} + Q_{n-2} & \text{PER } n \geq 2 \\ Q_1 = 2, Q_2 = 3 \end{cases}$$

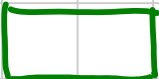
E QUESTO CI PERMETTE DI CONCLUDERE CHE

$$Q_n = F_{n+2}.$$

PROBLEMA 2

CONTARE IL NUMERO DI RICOPRIMENTI DELLA STRISCIA



CON "PEZZI"  OPPURE .

SE $n=1$ C'E' UN UNICO RICOPRIMENTO 

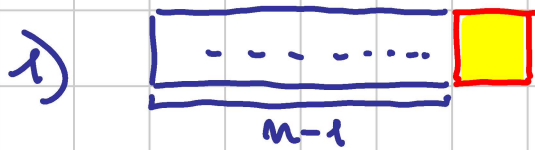
SE $n=2$ SONO



SE $n=3$ SONO



SIA Q_n IL NUMERO DI TALI RICOPRIMENTI
 SE $n \geq 2$ ALLORA LA PARTE FINALE DELLA
 STRISCIA PUÒ ESSERE RICOPERTA IN DUE
 MODI



QUINDI

$$\begin{cases} Q_n = Q_{n-1} + Q_{n-2} & \text{PER } n \geq 2 \\ Q_1 = 1, Q_2 = 2 \end{cases}$$

E QUESTO CI PERMETTE DI CONCLUDERE CHE

$$Q_n = F_{n+1}.$$

OSSERVAZIONE. SUPPONIAMO CHE LA PRIMA
 E L'ULTIMA CASELLA DELLA STRISCIA
 SIANO "INCOLLATE" IN MODO CHE SIANO AMMISSIBILI
 ANCHE RICOPRIMENTI CON UN DOMINO
 "A CAVALLO" DEL PRIMO E DELL'ULTIMO QUADRATINO.
 ALLORA AL NUMERO DI RICOPRIMENTI GIÀ
 CALCOLATO SI AGGIUNGONO QUELLI DEL TIPO



CHE EVIDENTEMENTE SONO $Q_{n-2} = F_{n-1}$.

QUINDI IN TOTALE SONO $Q_n + Q_{n-2} = F_{n+1} + F_{n-1}$

SI TRATTA DEI COSIDDETTI NUMERI DI LUCAS $L_m = F_{m+1} + F_{m-1}$

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
L_m	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123

PROBLEMA 3.

CONTARE IL NUMERO DI PERMUTAZIONI DI $1, 2, 3, \dots, n$ TALI CHE PER OGNI NUMERO LA DIFFERENZA TRA LA POSIZIONE INIZIALE E QUELLA FINALE È IN MODULO ≤ 1 .

SE $n=1$ L'UNICA PERMUTAZIONE È 1.

SE $n=2$ ABBIAMO 12, 21.

SE $n=3$ ABBIAMO

123	213	312
132	231	321

SE $n=4$ LE PERMUTAZIONI CHE SODDISFANO LE CONDIZIONI RICHIESTE SONO

1234, 1243, 2134, 2143, 1324.

SIA Q_n IL NUMERO DI TALI PERMUTAZIONI.

SE $n \geq 2$ ALLORA IL NUMERO n PUÒ OCCUPARE SOLO LA POSIZIONE n O LA POSIZIONE $n-1$. IN QUEST'ULTIMO CASO L' $(n-1)$ -SIMA POSIZIONE DEVE ESSERE OCCUPATA DA $n-1$.



QUINDI

$$\begin{cases} a_m = a_{m-1} + a_{m-2} & \text{PER } m \geq 2 \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \end{cases}$$

E QUESTO CI PERMETTE DI CONCLUDERE CHE

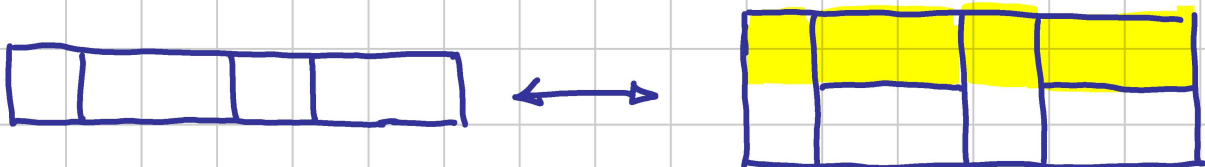
$$a_m = F_{m+1}.$$

OSSERVAZIONE. ANCHE IN QUESTO CASO ABBIAMO OTTENUTO F_{m+1} . IN EFFETTI TRA L'INSIEME DEI RICOPRIMENTI CONTATI NEL PROBLEMA 2 E LE PERMUTAZIONI DEL PROBLEMA 3 ESISTE UNA CORRISPONDENZA BIUNIVUCA ILLUSTRATA NEL SEGUENTE ESEMPIO PER $m=9$



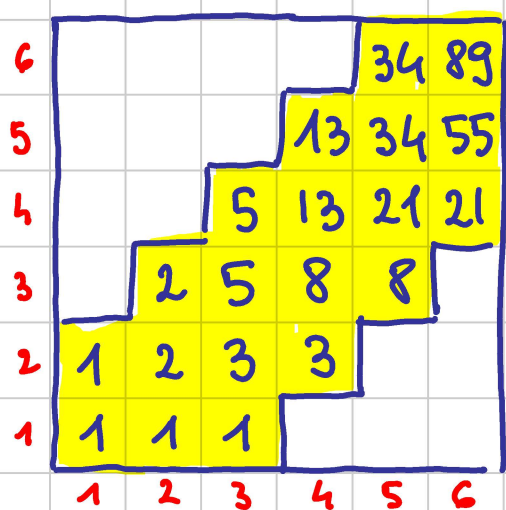
CIOÈ AD OGNI DOMINO DEL RICOPRIMENTO CORRISPONDE UNO SCAMBIO NELLA PERMUTAZIONE.

UN'ALTRA CORRISPONDENZA BIUNIVUCA ESISTE TRA I RICOPRIMENTI DELLA STRISCIA $1 \times m$ DEL PROBLEMA 2 E I RICOPRIMENTI DEL RETTANGOLO $2 \times m$ CON SOLO DOMINO



PROBLEMA 4.

CONTARE IL NUMERO DI PERCORSI NEL QUADRATO $m \times m$ CHE PARTONO DALL'ANGOLO IN BASSO A SINISTRA E CHE ARRIVANO NELL'ANGOLO IN ALTO A DESTRA CON MOVIMENTI VERSO DESTRA O VERSO L'ALTO E RIMANENDO NELLA REGIONE GIALLA.



SIA Q_m IL NUMERO DI PERCORSI AMMISSIBILI DA $(1,1)$ A (m,m)
E SIA b_m IL NUMERO DI PERCORSI DA $(1,1)$ A $(m-1,m)$.

PER $3 \leq m \leq 6$ IL NUMERO DI TALI PERCORSI È

$$Q_3 = 5, \quad Q_4 = 13, \quad Q_5 = 34, \quad Q_6 = 89$$

$$b_3 = 3, \quad b_4 = 8, \quad b_5 = 21, \quad b_6 = 55$$

INOLTRE NOTIANO CHE PER $m \geq 4$

$$\begin{cases} Q_m = Q_{m-1} + b_m \\ b_m = Q_{m-1} + b_{m-1} \end{cases}$$

QUESTE RICORRENZE PERMETTONO NON SOLO DI CALCOLARE Q_m E b_m PER $m \geq 4$ MA ANCHE DI VERIFICARE CHE

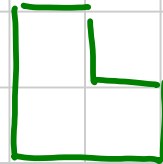
$$Q_m = F_{2m-1} \quad \text{e} \quad b_m = F_{2m-2}.$$

PROBLEMA 5.

CONTARE IL NUMERO DI RICOPRIMENTI
DEL RETTANGOLO 2×8 OTTENIBILI CON
PEZZI (EVENTUALMENTE RUOTATI) DELLA FORMA

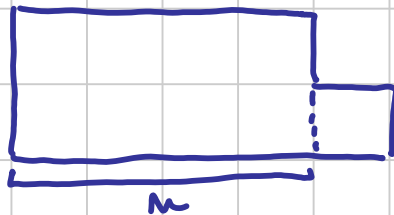


DOMINO

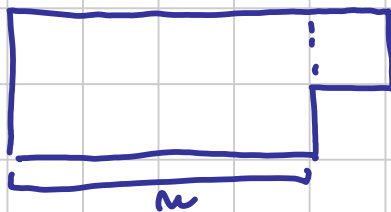


TRIOMINO

CONSIDERIAMO IL GENERICO RETTANGOLO
 $2 \times m$. SIA a_m IL NUMERO DI TALI RICO-
PRIMENTI E SIA b_m IL NUMERO DI RICOPRI-
MENTI DI



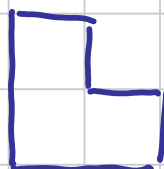
PER SIMMETRIA b_m CONTA ANCHE IL NUMERO
DI RICOPRIMENTI DI



PER $m=1$ SI HA CHE

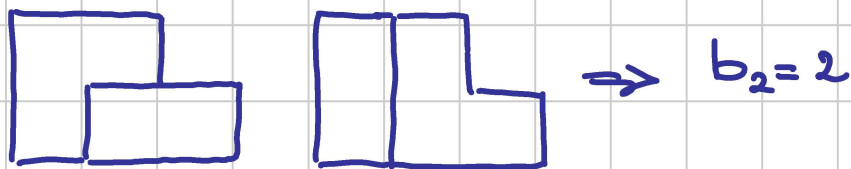
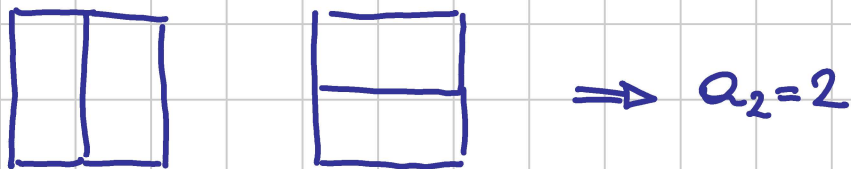


$$\Rightarrow a_1 = 1$$

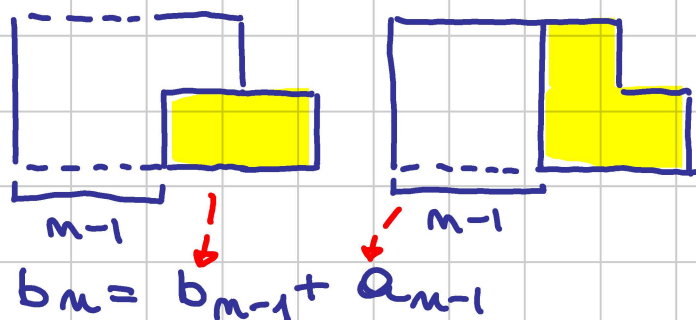
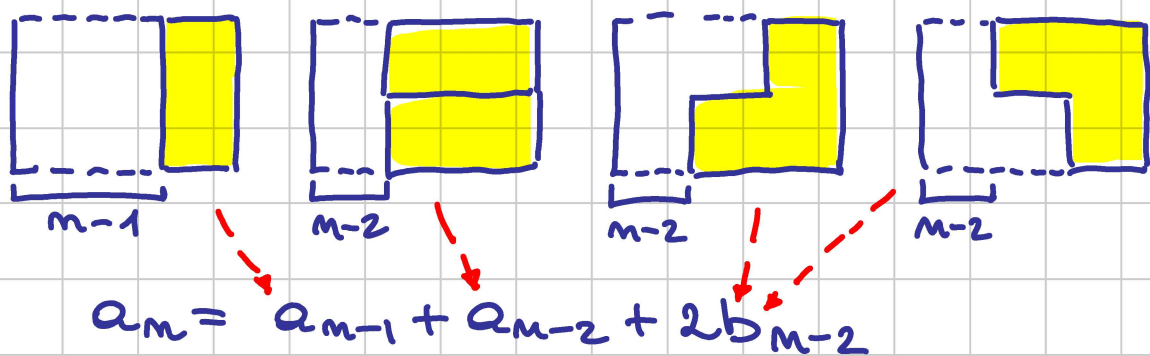


$$\Rightarrow b_1 = 1$$

PER $m=2$ SI HA CHE



INOLTRE PER $m \geq 3$ RICOPRENDO LA PARTE FINALE DEL RETTANGOLO OTTENIAMO DUE RICORRENZE



TALI RICORRENZE CI PERMETTONO DI FARE AGEVOLMENTE IL CALCOLO.

m	1	2	3	4	5	6	7	8
a_m	1	2	5	11	24	53	117	258
b_m	1	2	4	9	20	44		

LA RISPOSTA È

258

OSSERVAZIONE. DALLE RELAZIONI RICORSIVE

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 2b_{n-2} \quad (1)$$

$$b_n = b_{n-1} + a_{n-1} \quad (2)$$

NE POSSIAMO OTTENERE DELLE ALTRE.
AD ESEMPIO SE TRASLIAMO GLI INDICI
OTTENIAMO

$$a_{n-1} = a_{n-2} + a_{n-3} + 2b_{n-3} \quad (1')$$

$$b_{n-2} = b_{n-3} + a_{n-3} \quad (2')$$

COMBINANDO $(1) - (1') + 2 \cdot (2')$ OTTENIAMO

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} + 2b_{n-2} = & a_{n-1} + a_{n-2} + 2b_{n-2} \\ & - a_{n-2} - a_{n-3} - 2b_{n-3} \\ & + 2b_{n-3} + 2a_{n-3} \end{aligned}$$

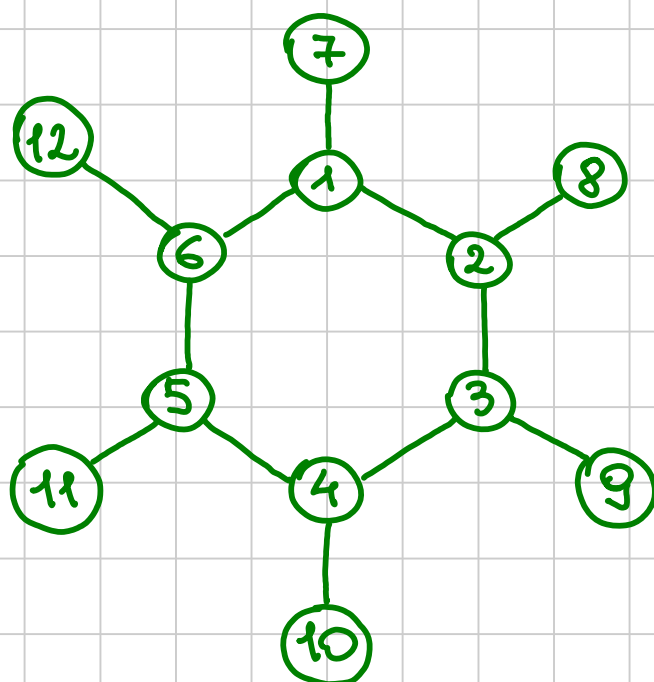
E QUINDI PER $n \geq 4$ SI TROVA

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-3}$$

CHE PERMETTE DI EVITARE IL CALCOLO DEI
 b_n , MA CHE HA BISOGNO DI 3 DATI INIZIALI
 $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ E $a_3 = 5$.

PROBLEMA 6.

CONTARE IL NUMERO DI MODI DI COLORARE I VERTICI DEL SEGUENTE GRAFO



CON AL PIÙ 4 COLORI ROSSO, GIALLO, VERDE, BLU IN MODO CHE VERTICI COLLEGATI SIANO DI COLORI DIVERSI.

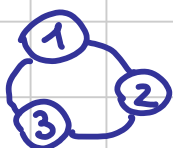
INDICHIAMO CON C_m IL NUMERO DI MODI DI COLORARE UN CICLO DI m VERTICI CON AL PIÙ 4 COLORI.

$$m=2$$



$$C_2 = 4 \cdot 3 = 12$$

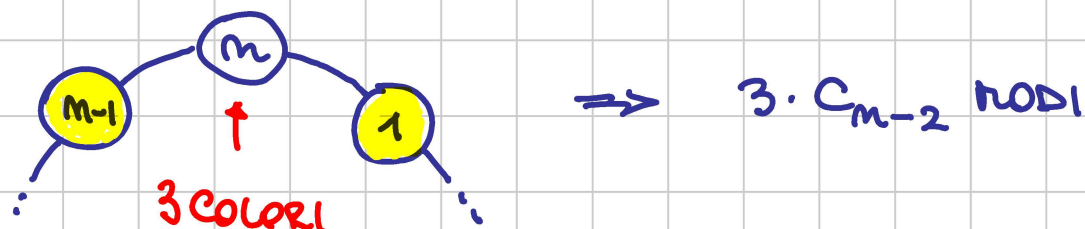
$$m=3$$



$$C_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

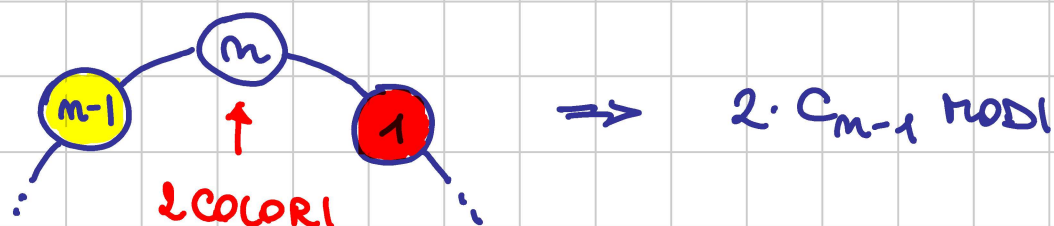
PER $m \geq 4$ NEL COLORARE IL VERTICE m CI SONO DUE CASI POSSIBILI.

1) I VERTICI COLLEGATI AL VERTICE m HANNO LO STESSO COLORE.



IL VERTICE m SI PUO' COLORARE IN 3 MODI E I DUE VERTICI ADIACENTI CHE SONO DELLO STESSO COLORE SI POSSONO "FONDERE" E OTTENERE UNA COLORAZIONE DI UN CICLO DI $m-2$ VERTICI.

2) I VERTICI COLLEGATI AL VERTICE m HANNO COLORI DIVERSI



IL VERTICE m SI PUO' COLORARE IN 2 MODI E I DUE VERTICI ADIACENTI CHE SONO DI COLORI DIVERSI SI POSSONO "UNIRE" E OTTENERE UNA COLORAZIONE DI UN CICLO DI $m-1$ VERTICI.

QUINDI LA RICORRENZA E'

$$C_n = 2C_{n-1} + 3C_{n-2} \quad \text{PER } n \geq 3$$

DA CUI OTTENIAMO

n	2	3	4	5	6
C_n	1	2	7	20	61

12

ORA PER COLORARE IL GRAFO RICHIESTO
E' NECESSARIO COLORARE UN CICLO DI 6
VERTICI E I 6 VERTICI SUI RAGGI.

QUESTO SI PUO' FARE IN $C_6 \cdot (4-1)^6$ MODI.
COSI' LA RISPOSTA E'

$$61 \cdot 12 \cdot 3^6 = 533628$$