Stage Urbi et Orbi - Lez. 8

Titolo nota

15 febbraio 2019 (15.00-18.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

www.problemisvolti.it

SOMME NOTEVOLI

PROBLEMA 0 CALCOLARE $1+2+3+\cdots+18+19+20$.

SOLUZIONE SE INDICHIAMO CON S LA SOMMA DA CALCOLARE ALLORA:

$$2\cdot S = S+S = 1+2+3+\dots+18+19+20+$$
$$+20+19+18+\dots+3+2+1=$$
$$=21+21+21+\dots+21+21+21 = 20\cdot 21$$

CIOÈ:

$$2\cdot S = 20\cdot 21$$

DA CUI SEGUE:

$$S = \frac{20\cdot 21}{2} = 210$$

GENERALIZZAZIONE CALCOLARE $1+2+3+\dots+(n-2)+(n-1)+n$.

PROCEDENDO COME NEL **PROBLEMA 0**, SI INDICA CON S LA SOMMA CERCATA E SI OTTIENE:

$$2\cdot S = S+S = 1+2+3+\dots+(n-2)+(n-1)+n+$$
$$+n+(n-1)+(n-2)+\dots+3+2+1=$$
$$=(n+1)+(n+1)+(n+1)+\dots+(n+1)+(n+1)+(n+1) = n\cdot(n+1)$$

(1) DA CUI SEGUE: $\boxed{S = \frac{n(n+1)}{2}}$

FORMULA (DA RICORDARE) CHE FORNISCE LA SOMMA DEI PRIMI n NUMERI INTERI POSITIVI

PROBLEMA 1 CALCOLARE LA SOMMA DEGLI INTERI CONGRUI A 1 (MOD 3) COMPRESI TRA 0 E 100.

SOLUZIONE SI TRATTA DEI NUMERI, COMPRESI TRA 0 E 100, CHE POSSO OTTENERE AGGIUNGENDO AD 1 UN MULTIPLO DI 3, QUINDI LA SOMMA DA CALCOLARE È:

$$S = 1+4+7+\dots+94+97+100.$$

SI NOTI CHE IL TRUCCO USATO PRIMA FUNZIONA ANCORA:

$$\begin{aligned} 2\cdot S = S+S &= 1+4+7+\dots+94+97+100+ \\ &+100+97+94+\dots+7+4+1 = \\ &= 101+101+101+\dots+101+101+101 = \underbrace{34\cdot 101}_{} \end{aligned}$$

PERCHÉ I NUMERI CHE SOMMIAMO SONO IN TUTTO 34

DA CUI SEGUE:

$$S = \frac{34\cdot 101}{2} = 1717$$

GENERALIZZAZIONE LA SEQUENZA DEI TERMINI DELLA SOMMA CERCATA NEL PROBLEMA 1 È QUELLO CHE SI DICE UNA PROGRESSIONE ARITMETICA, CIOÈ UNA SEQUENZA DI NUMERI IN CUI LA DIFFERENZA TRA 2 TERMINI CONSECUTIVI HA SEMPRE LO STESSO VALORE (NEL CASO IN QUESTIONE LA DIFFERENZA È 3). QUESTO FA SI CHE ACCOPPIANDO PRIMO E ULTIMO TERMINE, POI SECONDO E PENULTIMO, POI TERZO E TERZULTIMO, E COSÌ VIA, SI OTTENGA SEMPRE LA STESSA SOMMA. COME CONSEGUENZA IL TRUCCO GIÀ USATO NEL PROBLEMA 0 FUNZIONA ANCORA. QUINDI, IN GENERALE, SE I TERMINI DI UNA SOMMA SONO UNA PROGRESSIONE ARITMETICA, VALE SEMPRE LA FORMULA:

$$\boxed{\text{SOMMA} = \frac{(\text{PRIMO} + \text{ULTIMO TERMINE})\cdot \text{NUMERO TERMINI}}{2}} \qquad (2)$$

PROBLEMA 2 CALCOLARE $1^3+2^3+3^3+\dots+20^3$.

SOLUZIONE STAVOLTA NON SI TRATTA DI UNA PROGRESSIONE ARITMETICA VISTO CHE LA DIFFERENZA TRA DUE TERMINI CONSECUTIVI NON È COSTANTE, MA CRESCENTE. LA NOSTRA STRATEGIA DI SOLUZIONE CONSISTERÀ NEL CERCARE DI INDOVINARE LA FORMULA GIUSTA, GUARDANDO COSA SUCCEDE CON POCHI NUMERI, DOPODICHÉ DIMOSTRARE PER INDUZIONE CHE VALE IN GENERALE.

FACENDO A MANO I CALCOLI NEI PRIMI 4 CASI SI HA

(3)

$$1^3=1$$
$$1^3+2^3=9$$
$$1^3+2^3+3^3=36$$
$$1^3+2^3+3^3+4^3=100$$

SI NOTA SUBITO CHE SI OTTIENE SEMPRE UN QUADRATO:

$$1^3=1=1^2$$
$$1^3+2^3=9=3^2$$
$$1^3+2^3+3^3=36=6^2$$
$$1^3+2^3+3^3+4^3=100=10^2$$

A QUESTO PUNTO, GLI STUDENTI PIÙ ESPERTI AVRANNO NOTATO CHE $3=1+2$, $6=1+2+3$ E $10=1+2+3+4$, QUINDI:

$$1^3=1=1^2=1^2$$
$$1^3+2^3=9=3^2=(1+2)^2$$
$$1^3+2^3+3^3=36=6^2=(1+2+3)^2$$
$$1^3+2^3+3^3+4^3=100=10^2=(1+2+3+4)^2$$

SOSPETTIAMO QUINDI CHE IN GENERALE VALGA LA FORMULA:

$$1^3+2^3+3^3+\dots+n^3=(1+2+3+\dots+n)^2$$

CHE, COMBINATA COL FATTO (GIÀ TROVATO) CHE:

$$1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

CI FAREBBE OTTENERE LA FORMULA:

$$\boxed{1^3+2^3+3^3+\dots+n^3=\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}} \qquad (4)$$

LA SOLUZIONE DEL NOSTRO PROBLEMA SAREBBE QUINDI:

$$1^3+2^3+3^3+\dots+20^3=\frac{20^2\cdot 21^2}{4}=44100$$

PERÒ, PER ESSERE SICURI CHE LA RISPOSTA È GIUSTA DOBBIAMO ACCERTARCI CHE LA (4) VALGA DAVVERO. RICORDIAMOCI CHE L'ABBIAMO SOLO INDOVINATA A PARTIRE DA POCHI CASI PARTICOLARI, SAPPIAMO CIOÈ CHE VALE PER $n=1,2,3$ E 4. PER MOSTRARE CHE VALE SEMPRE, MOSTRIAMO ORA CHE SE VALE PER UN CERTO $n=k$, DEVE NECESSARIAMENTE VALERE ANCHE PER IL SUCCESSIVO $n=k+1$. QUESTO, COMBINATO COL FATTO CHE PER $n=1$ VALE, CI PERMETTERÀ DI CONCLUDERE CHE VALE PER OGNI INTERO $n\geq 1$.

DIRE CHE (4) VALE PER $n=k$, SIGNIFICA CHE

$$1^3+2^3+3^3+\dots+k^3=\frac{k^2\cdot(k+1)^2}{4}$$

MA ALLORA, PER $n=k+1$ SI HA:

$$1^3+2^3+3^3+\dots+k^3+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3=$$

$$=\frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4}=$$

$$=\frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}=$$

$$=\frac{(k+1)^2\cdot(k+2)^2}{4}$$

QUINDI SI SCOPRE CHE LA (4) VALE ANCHE PER $n=k+1$.

PROBLEMA 3 CALCOLARE $1^2+2^2+3^2+\dots+100^2$.

SOLUZIONE STAVOLTA, OLTRE A NON ESSERE UNA PROGRESSIONE ARITMETICA, NON È NEMMENO COSÌ FACILE INDOVINARE UNA POSSIBILE FORMULA A PARTIRE DA UN PO' DI CASI PARTICOLARI, PER POI PROVARE A DIMOSTRARLA PER INDUZIONE. QUINDI, PER TROVARE UNA FORMULA PER $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2$, PROCEDIAMO IN ALTRO MODO.

IL NOSTRO PUNTO DI PARTENZA (CAPIREMO POI PERCHÉ) È L'IDENTITÀ:

$$(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1 \tag{5}$$

SCRIVIAMOLA, IN SEQUENZA, PER $n=1,2,3,4,\dots$, POI SOMMIAMO LE UGUAGLIANZE OTTENUTE MEMBRO A MEMBRO:

SOMMANDO TUTTI I TERMINI RIMANGONO SOLO $(n+1)^3$ E -1^3 PERCHÉ TUTTI GLI ALTRI COMPAIONO 2 VOLTE, CON SEGNO OPPOSTO

$$\begin{aligned}
2^3-1^3&=3\cdot1^2+3\cdot1+1\\
3^3-2^3&=3\cdot2^2+3\cdot2+1\\
4^3-3^3&=3\cdot3^2+3\cdot3+1\\
5^3-4^3&=3\cdot4^2+3\cdot4+1\\
&\vdots\\
(n+1)^3-n^3&=3\cdot n^2+3\cdot n+1
\end{aligned}$$

$$(n+1)^3-1^3=3\cdot(1^2+2^2+\dots+n^2)+3\cdot(1+2+\dots+n)+(1+1+\dots+1) \tag{6}$$

OSSERVIAMO CHE:

$$1+1+1+\dots+1=n$$

$$1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=$ SOMMA DA CERCARE CHE INDICHIAMO CON S.

QUINDI LA (6) DIVENTA:

$$(n+1)^3-1^3=3\cdot S+3\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n \tag{7}$$

LA FORMULA CERCATA SI OTTIENE QUINDI ESPLICITANDO LA (7)

RISPETTO A S. SI OTTIENE:

$$S = -\frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)^3 - 1^3}{3} - \frac{n}{3} =$$

$$= \frac{-3n(n+1) + 2(n+1)^3 - 2 - 2n}{6} =$$

$$= \frac{-3n(n+1) + 2(n+1)^3 - 2(n+1)}{6} =$$

$$= \frac{(n+1)(-3n + 2n^2 + 4n + 2 - 2)}{6} =$$

$$= \frac{(n+1)\cdot(2n^2 + n)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ABBIAMO QUINDI OTTENUTO LA FORMULA:

(8) $$\boxed{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

POSSIAMO ORA USARE LA FORMULA TROVATA PER RISOLVERE IL PROBLEMA 3:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 100^2 = \frac{\overset{50}{\cancel{100}} \cdot 101 \cdot \overset{67}{\cancel{201}}}{\cancel{2}\,\cancel{6}} = 50 \cdot 67 \cdot 101 = 3350 \cdot 101 = 338'350$$

GENERALIZZAZIONE IL TRUCCO USATO PER RICAVARE (8) È ABBASTANZA INNATURALE ED È DIFFICILE CHE ALLO STUDENTE POSSA VENIRE IN MENTE SENZA CONOSCERLO GIÀ. TUTTAVIA, UNA VOLTA VISTO, È FACILMENTE RICICLABILE. AD ESEMPIO PROVIAMO AD UTILIZZARLO PER RICAVARE LA FORMULA PER $1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4$.

STAVOLTA L'IDENTITÀ DI PARTENZA È:

(9) $$(n+1)^5 - n^5 = 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1$$

COSÌ COME FATTO IN PRECEDENZA, SCRIVIAMO LA (9) PER $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ E POI SOMMIAMO MEMBRO A MEMBRO:

$$
\begin{aligned}
2^5 - 1^5 &= 5\cdot 1^4 + 10\cdot 1^3 + 10\cdot 1^2 + 5\cdot 1 + 1\\
3^5 - 2^5 &= 5\cdot 2^4 + 10\cdot 2^3 + 10\cdot 2^2 + 5\cdot 2 + 1\\
4^5 - 3^5 &= 5\cdot 3^4 + 10\cdot 3^3 + 10\cdot 3^2 + 5\cdot 3 + 1\\
5^5 - 4^5 &= 5\cdot 4^4 + 10\cdot 4^3 + 10\cdot 4^2 + 5\cdot 4 + 1\\
&\vdots\\
(n+1)^5 - n^5 &= 5\cdot n^4 + 10\cdot n^3 + 10\cdot n^2 + 5\cdot n + 1
\end{aligned}
$$

(10) $$(n+1)^5 - 1^5 = 5\cdot\underbrace{(1^4+2^4+\dots+n^4)}_{S} + 10\cdot\underbrace{(1^3+2^3+\dots+n^3)}_{\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}} + 10\underbrace{(1^2+2^2+\dots+n^2)}_{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} + 5\cdot\underbrace{(1+2+\dots+n)}_{\frac{n(n+1)}{2}} + \underbrace{(1+1+\dots+1)}_{n}$$

FORMULA INCOGNITA $\rightarrow S$

ESPLICITANDO LA (10) RISPETTO A S SI OTTIENE:

$$S = \frac{(n+1)^5 - 1}{5} - 2\cdot\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4} - 2\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n\cdot(n+1)}{2} - \frac{n}{5} =$$

$$= \dots\text{(CALCOLI LASCIATI ALLO STUDENTE)}\dots = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

QUINDI VALE LA FORMULA:

(11) $$\boxed{1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}}$$

INSOMMA, SAPENDO TUTTE LE FORMULE PER CALCOLARE

$$1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$$

PER $k = 1, 2$ E 3, SI TROVA LA FORMULA PER $k = 4$.

CONTINUANDO SI POTREBBE TROVARE LA FORMULA PER $k = 5, 6, 7$, ECC.

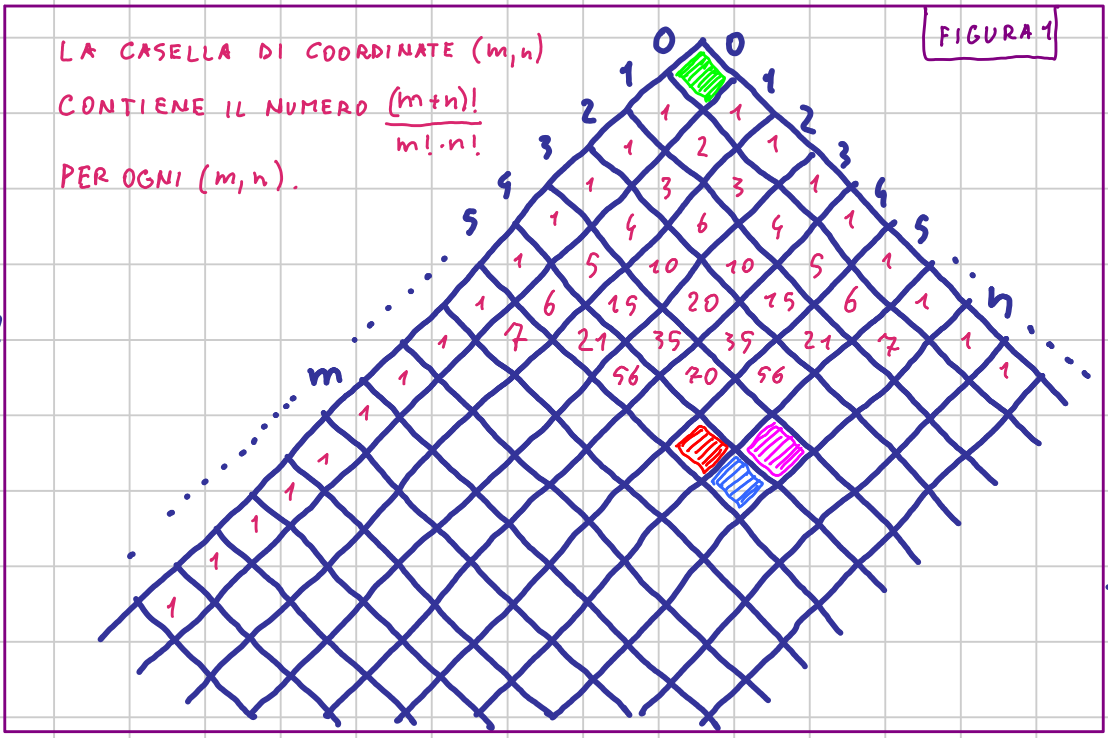
TUTTAVIA IL COMPITO RISULTA ABBASTANZA PESANTE DAL PUNTO DI

VISTA COMPUTAZIONALE, PER CUI VALE LA PENA PRENDERE IN CONSIDERAZIONE APPROCCI ALTERNATIVI, CHE IMPAREREMO NEI PROBLEMI CHE SEGUONO.

PROBLEMA 4 CALCOLARE $T_1 + T_2 + T_3 + \cdots + T_{20}$, DOVE T_n INDICA L'n-ESIMO NUMERO TRIANGOLARE, CIOÈ $T_n = (1+2+3+\cdots+n)$.

OSSERVAZIONE PER COMPRENDERE BENE LA SOLUZIONE DEL PROBLEMA 4 RIPRENDIAMO E APPROFONDIAMO IL PROBLEMA 10 DELLA LEZIONE 2 (COMBINATORIA ZERO).

CONSIDERIAMO LA TABELLA IN FIGURA 1 CHE, VERSO IL BASSO SI ESTENDE ALL'INFINITO. UNA PULCE PARTE DALLA CASELLA VERDE E PUÒ FARE SOLO SALTI TRA CASELLE CON UN LATO IN COMUNE, ANDANDO SEMPRE VERSO IL BASSO (A DESTRA O A SINISTRA). SI IMMAGINI DI SCRIVERE IN OGNI CASELLA IL NUMERO DI PERCORSI (CIOÈ SEQUENZE DI SALTI) DIVERSI CON CUI LA PULCE CI PUÒ ARRIVARE.



NEL PROBLEMA 10 DELLA LEZIONE 2 AVEVAMO TROVATO CHE:

$$\text{NUMERO PERCORSI} = \frac{(n+m)!}{n!\cdot m!}$$

DOVE n E m SONO LE COORDINATE DELLA CASELLA

IN FIGURA 1 ABBIAMO INIZIATO A RIEMPIRE UN PO' DI CASELLE SCRIVENDOCI TALI NUMERI.

SI NOTI CHE LA DISTRIBUZIONE DI NUMERI NELLA TABELLA HA LE DUE SEGUENTI PROPRIETÀ:

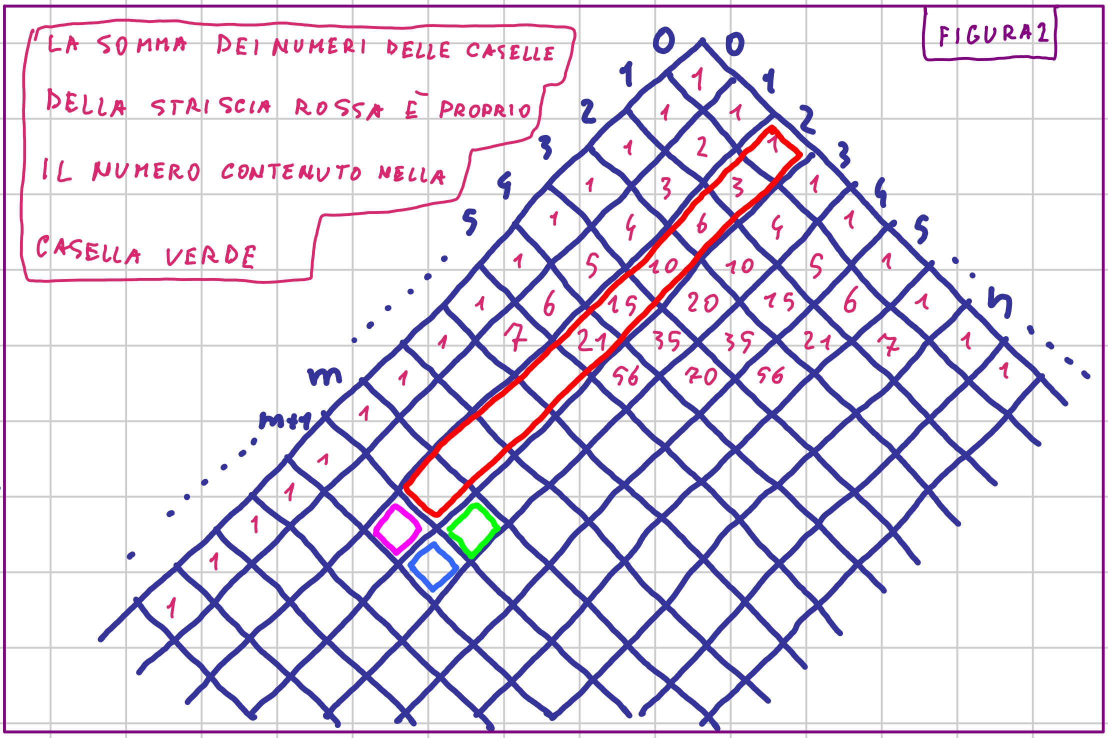
1) SULLE CASELLE DI BORDO C'È 1.
2) OGNI CASELLA INTERNA CONTIENE UN NUMERO CHE È LA SOMMA

DEI NUMERI CONTENUTI NELLE DUE CASELLE CHE GLI STANNO IMMEDIATAMENTE SOPRA.

LA PROPRIETÀ (1) È OVVIA. QUANTO ALLA (2), PER CONVINCERSI CHE VALE SEMPRE, SI OSSERVI LA FIGURA 1: I PERCORSI CHE, PARTENDO DALLA CASELLA VERDE ARRIVANO IN QUELLA BLU, AL PENULTIMO SALTO PASSANO NECESSARIAMENTE SULLA CASELLA ROSSA O SU QUELLA ROSA. QUINDI IL NUMERO DEI PERCORSI CHE ARRIVANO IN QUELLA BLU È LA SOMMA DEL NUMERO DEI PERCORSI CHE ARRIVANO IN QUELLA ROSSA COL NUMERO DI PERCORSI CHE ARRIVANO IN QUELLA ROSA.

MOSTRIAMO ORA CHE LA TABELLA DI NUMERI CHE ABBIAMO COSTRUITO, CHE PRENDE IL NOME DI TRIANGOLO DI PASCAL O DI TARTAGLIA, HA UN'ALTRA INTERESSANTE PROPRIETÀ CHE LA RENDE UTILE PER IL CALCOLO RAPIDO DI ALCUNE SOMME. LA PROPRIETÀ È LA SEGUENTE:

3) SE PRENDO UNA STRISCIA DI CASELLE CHE PARTE DAL BORDO (AD ESEMPIO LA STRISCIA ROSSA IN FIGURA 2) LA LORO SOMMA È SEMPRE UGUALE AL NUMERO CONTENUTO NELLA CASELLA CHE STA DI FIANCO, VERSO IL BASSO, ALL'ULTIMA CASELLA DELLA STRISCIA (IN FIGURA 2, LA CASELLA VERDE).



LA DIMOSTRAZIONE DI (3) SI FA PER INDUZIONE SULLA LUNGHEZZA DELLA STRISCIA.

SE LA STRISCIA È LUNGA 1 LA PROPRIETÀ È OVVIA.

MOSTRIAMO ORA CHE SE VALE PER OGNI STRISCIA LUNGA m VALE ANCHE PER OGNI STRISCIA LUNGA $m+1$.

OVVERO, RIFERENDOCI ALLA FIGURA 2, MOSTRIAMO CHE SE VALE PER LA STRISCIA

ROSSA ALLORA VALE ANCHE PER LA STRISCIA OTTENUTA AGGIUNGENDO LA CASELLA ROSA ALLA STRISCIA ROSSA. MA QUESTO È OVVIO PERCHÉ SAPPIAMO (PROPRIETÀ (2)) CHE:

CASELLA BLU = CASELLA ROSA + CASELLA VERDE

SE QUINDI SAPPIAMO GIÀ CHE LA SOMMA DELLA STRISCIA ROSSA STA NELLA CASELLA VERDE ALLORA OTTENIAMO:

CASELLA BLU = CASELLA ROSA + STRISCIA ROSSA.

CONSEGUENZA IMMEDIATA DELLA PROPRIETÀ (3) È LA SEGUENTE:

4) LA STRISCIA ROSSA IN FIGURA 2 CONTIENE PROPRIO LA SEQUENZA DEI NUMERI TRIANGOLARI.

PER DIMOSTRARE (4) BASTA OSSERVARE CHE LA STRISCIA CHE GLI STA SOPRA È PROPRIO LA SEQUENZA DI TUTTI I NUMERI INTERI POSITIVI QUINDI, IN VIRTÙ DELLA PROPRIETÀ (3), LA K-ESIMA CASELLA DELLA STRISCIA ROSSA, CIOÈ QUELLA CON COORDINATE $(k-1, 2)$, CONTIENE LA SOMMA DEI NUMERI DA 1 A K.

E FINALMENTE, DOPO DUE PAGINE DI SPROLOQUI SUL TRIANGOLO DI PASCAL, CI SIAMO PREPARATI GLI STRUMENTI PER POTER RISOLVERE IN POCHE RIGHE IL PROBLEMA 4.

$\boxed{\text{SOLUZIONE DEL PROBLEMA 4}}$ ABBIAMO:

$T_1 + T_2 + \dots + T_{20} =$ (SOMMA STRISCIA ROSSA DI FIGURA 2 CON $m = 19$) $=$

$=$ (CASELLINA VERDE IN FIGURA 2, CON $m = 19$) $=$

$$= \frac{(19+3)!}{19! \cdot 3!} = \frac{22 \cdot \overset{7}{\cancel{21}} \cdot \overset{10}{\cancel{20}}}{\underset{1}{\cancel{3}} \cdot \underset{1}{\cancel{2}} \cdot 1} = 1540$$

GENERALIZZAZIONE ABBIAMO IMPARATO CHE SOMMARE LA SEQUENZA DEI PRIMI n NUMERI TRIANGOLARI EQUIVALE A SOMMARE LE PRIME n CASELLE DELLA STRISCIA ROSSA DI FIGURA 2. USANDO LA NOTAZIONE DEI COEFFICIENTI BINOMIALI CIÒ SIGNIFICA CHE:

$$T_1 + T_2 + \cdots + T_n = \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \cdots + \binom{2+n-1}{2} = \binom{2+n}{3}$$

LA PROPRIETÀ (3) PERÒ VALE PER TUTTE LE STRISCIE CHE PARTONO DAL BORDO, QUINDI PER OGNI $k \geq 0$ E PER OGNI $n \geq 0$ SI HA:

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \cdots + \binom{k+n}{k} = \binom{k+n+1}{k+1}$$

OSSERVAZIONE ABBIAMO RISOLTO I PROBLEMI 3 E 4 USANDO TECNICHE COMPLETAMENTE DIVERSE, CHE SI GENERALIZZANO IN DIREZIONI DIVERSE. VOGLIAMO PERÒ FAR VEDERE CHE, NOTA LA SOLUZIONE DI UNO QUALSIASI DEI 2, LA SI PUÒ USARE PER RISOLVERE L'ALTRO. QUESTO PERÒ NON RENDE INUTILE IL FATTO DI AVERLE SVOLTE ENTRAMBE, PERCHÈ CI SONO SERVITE PER VEICOLARE ALLO STUDENTE 2 IDEE DIVERSE, ENTRAMBE IMPORTANTI.

SOLUZIONE DEL PROBLEMA 3 CHE USA QUELLA DEL PROBLEMA 4

OSSERVIAMO CHE PER OGNI $n \geq 2$ SI HA:

$$n^2 = T_n + T_{n-1}$$

(IN FIGURA 3 È ESEMPLIFICATO IL CASO $n=6$)

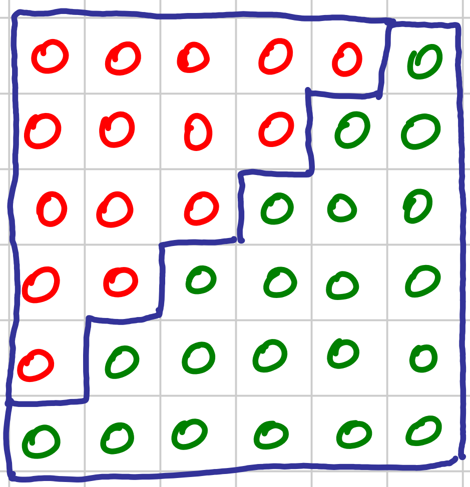
INVECE PER $n=1$ SI HA BANALMENTE:

$$1^2 = T_1$$

DI CONSEGUENZA ABBIAMO:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 =$$

FIGURA 3



$$6^2 = T_6 + T_5$$

$$= T_1 + (T_2 + T_1) + (T_3 + T_2) + (T_4 + T_3) + \dots + (T_n + T_{n-1}) =$$

$$= (T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + \dots + T_n) + (T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_{n-1}) =$$

$$= \frac{(n-1+3)!}{(n-1)!\cdot 3!} + \frac{(n-2+3)!}{(n-2)!\cdot 3!} = \frac{(n+2)\cdot(n+1)\cdot n}{6} + \frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)}{6} =$$

$$= \frac{(n+1)\cdot n\cdot(n+2+n-1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

SOLUZIONE DEL PROBLEMA 4 CHE USA QUELLA DEL PROBLEMA 3 SI HA:

$$\sum_{k=1}^{n} T_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(k^2+k) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{n(n+1)}{12}(2n+1+3) =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+4)}{12} = \frac{(n+2)(n+1)n}{6} = \binom{n+2}{3}$$

GENERALIZZAZIONE ESISTE UN METODO RAPIDO, CHE NELLA LEZIONE SUI POLINOMI NON ABBIAMO AVUTO IL TEMPO DI TRATTARE, CHE PERMETTE, CON POCHI CALCOLI, DI ESPRIMERE QUALSIASI POLINOMIO COME COMBINAZIONE LINEARE DI COEFFICIENTI BINOMIALI. QUESTO PERMETTE DI RICONDURRE SEMPRE IL CALCOLO DI $1^k+2^k+3^k+\dots+n^k$ A SOMME DI "STRISCE" SUL TRIANGOLO DI PASCAL.

AD ESEMPIO, UNA VOLTA TROVATO CHE:

$$m^3 = 6\underbrace{\binom{m}{3}}_{\text{PER } m=1 \text{ E } m=2 \text{ VALE ZERO}} + 6\underbrace{\binom{m}{2}}_{\text{PER } m=1 \text{ VALE ZERO}} + \binom{m}{1}$$

SI OTTIENE:

$$\sum_{m=1}^{n} m^3 = \sum_{m=1}^{n}\left(6\binom{m}{3}+6\binom{m}{2}+\binom{m}{1}\right)=$$

$$=6\sum_{m=1}^{n}\binom{m}{3}+6\sum_{m=1}^{n}\binom{m}{2}+\sum_{m=1}^{n}\binom{m}{1}=$$

PERCHÉ L'ESPRESSIONE $\binom{m}{3}$, CIOÈ $\frac{m(m-1)(m-2)}{6}$ VALE ZERO PER $m=1$ E $m=2$

PERCHÉ L'ESPRESSIONE $\binom{m}{2}$ CIOÈ $\frac{m(m-1)}{2}$ VALE ZERO PER $m=1$

$$=6\sum_{m=3}^{n}\binom{m}{3}+6\sum_{m=2}^{n}\binom{m}{2}+\sum_{m=1}^{n}\binom{m}{1}=$$

$$=6\cdot\binom{n+1}{4}+6\binom{n+1}{3}+\binom{n+1}{2}=$$

$$=\cancel{6}\cdot\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4\cdot\cancel{3\cdot 2}\cdot 1}+\cancel{6}\cdot\frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)}{\cancel{3\cdot 2}\cdot 1}+\frac{(n+1)\cdot n}{2\cdot 1}=$$

$$=\frac{n(n+1)}{4}\cdot\left((n-1)(n-2)+4(n-1)+2\right)=$$

$$=\frac{n(n+1)}{4}\cdot\left(n^2-3n\cancel{+2}+4n\cancel{-4}\cancel{+2}\right)=$$

$$=\frac{n(n+1)}{4}\cdot\left(n^2+n\right)=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

CIOÈ ABBIAMO RISCOPERTO CHE:

$$1^3+2^3+3^3+\dots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$\boxed{\text{PROBLEMA 5}}$ CALCOLARE $100\cdot 1+99\cdot 2+98\cdot 3+\dots+2\cdot 99+1\cdot 100$.

$\boxed{\text{OSSERVAZIONE}}$ DEL PROBLEMA 5 PROPONIAMO BEN 4 DIVERSI METODI DI SOLUZIONE, ALCUNI PIÙ SEMPLICI, ALTRI APPARENTEMENTE CONTORTI

MA CHE HANNO IL VANTAGGIO DI ESSERE APPLICABILI A CONTESTI PIÙ GENERALI.

I SOLUZIONE DEL PROBLEMA 5 SCRITTA COL SIMBOLO DI SOMMATORIA, LA SOMMA DA CALCOLARE DIVENTA:

$$100\cdot 1+99\cdot 2+98\cdot 3+\dots+2\cdot 99+1\cdot 100=\sum_{k=1}^{100}(101-k)\cdot k$$

QUINDI SI OTTIENE:

$$\sum_{k=1}^{100}(101-k)\cdot k=\sum_{k=1}^{100}(101k-k^2)=101\cdot\sum_{k=1}^{100}k-\sum_{k=1}^{100}k^2=$$

$$=101\cdot\frac{100\cdot 101}{2}-\frac{100\cdot 101\cdot 201}{6}=$$

$$=\frac{101\cdot 100}{2}\cdot\left(101-67\right)=\frac{101\cdot 100}{\cancel{2}}\cdot\overset{17}{\cancel{34}}=171700$$

II SOLUZIONE DEL PROBLEMA 5 IMMAGINIAMO DI ESPANDERE CIASCUN TERMINE DELLA SOMMA. AD ESEMPIO

$$100\cdot 1\longmapsto\overbrace{1+1+1+\dots+1}^{100\text{ TERMINI}}$$

$$99\cdot 2\longmapsto\overbrace{2+2+2+\dots+2}^{99\text{ TERMINI}}$$

$$\vdots$$

$$2\cdot 99\longmapsto 99+99$$

ALLORA LA NOSTRA SOMMA, IN FORMA ESPANSA, DIVENTA:

$$\begin{aligned}100\cdot 1+99\cdot 2+98\cdot 3+\dots+2\cdot 99+1\cdot 100&=1+1+1+\dots+1+1+1\\&+2+2+2+\dots+2+2+\\&+3+3+3+\dots+3\\&\ \vdots\\&+99+99\\&+100=\\&=T_{100}+T_{99}+T_{98}+\dots+T_3+T_2+T_1=\\&=\binom{102}{3}=\frac{\overset{17}{\cancel{102}}\cdot 101\cdot 100}{\cancel{6}_1}=171700\end{aligned}$$

III SOLUZIONE DEL PROBLEMA 5

IL PUNTO DI PARTENZA DELLA SOLUZIONE SEMBRA NON AVERE NULLA A CHE FARE CON IL PROBLEMA: DETTO $P(x)$ IL POLINOMIO:

$$P(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{99} + H.O.T.$$

STA PER "HIGHER ORDER TERMS" CIOÈ TERMINI DI GRADO PIÙ ALTO CHE NON CI INTERESSA COME SONO FATTI

ABBIAMO:

$$\begin{aligned}(P(x))^2 &= P(x) \cdot P(x) = \\ &= (1 + x + x^2 + \dots + x^{99} + H.O.T.) \cdot \\ &\cdot (1 + x + x^2 + \dots + x^{99} + H.O.T.) = \\ &= 1 + \\ &+ 1 \cdot x + x \cdot 1 + \\ &+ 1 \cdot x^2 + x \cdot x + x^2 \cdot 1 + \\ &+ 1 \cdot x^3 + x \cdot x^2 + x^2 \cdot x + x^3 \cdot 1 + \\ &\vdots \\ &+ 1 \cdot x^{99} + x \cdot x^{98} + x^2 \cdot x^{97} + \dots + x^{98} \cdot x + x^{99} \cdot 1 + H.O.T. \\ &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + 100x^{99} + H.O.T.\end{aligned}$$

QUINDI, SE INDICHIAMO CON $Q(x)$ IL POLINOMIO $(P(x))^2$, ABBIAMO

$$Q(x) = (P(x))^2 = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + 100x^{99} + H.O.T.$$

SE ORA CALCOLIAMO $(Q(x))^2$ SCOPRIAMO CHE IL TERMINE DI GRADO 99 HA COME COEFFICIENTE PROPRIO LA SOMMA CHE VOGLIAMO CALCOLARE. INFATTI SI HA:

$$\begin{aligned}(Q(x))^2 &= Q(x) \cdot Q(x) = \\ &= (1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + 100x^{99} + H.O.T.) \cdot \\ &\cdot (1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + 100x^{99} + H.O.T.) =\end{aligned}$$

$$= (\text{TERMINI DI GRADO} \leq 98) +$$
$$+ \left(1 \cdot 100x^{99} + 2x \cdot 99x^{98} + 3x^2 \cdot 98x^{97} + \dots + 100x^{99} \cdot 1\right) + H.O.T.$$

$$= (\text{TERMINI DI GRADO} \leq 98) +$$
$$+ \left(1 \cdot 100 + 2 \cdot 99 + 3 \cdot 98 + \dots + 100 \cdot 1\right) \cdot x^{99} +$$
$$+ H.O.T.$$

CIÒ SIGNIFICA CHE SE AVESSIMO UN MODO DIRETTO PER TROVARE SUBITO IL TERMINE DI GRADO 99 DI $(Q(x))^2$, ALLORA IL COEFFICIENTE DI TALE TERMINE SAREBBE PROPRIO IL VALORE DELLA NOSTRA SOMMA.

FORTUNATAMENTE TALE MODO C'È, INFATTI:

$$(Q(x))^2 = (P(x))^4 =$$
$$= (1 + x + x^2 + \dots + x^{99} + H.O.T.) \cdot \quad ①$$
$$\cdot (1 + x + x^2 + \dots + x^{99} + H.O.T.) \cdot \quad ②$$
$$\cdot (1 + x + x^2 + \dots + x^{99} + H.O.T.) \cdot \quad ③$$
$$\cdot (1 + x + x^2 + \dots + x^{99} + H.O.T.) \quad ④$$

DETTI x^α, x^β, x^γ E x^δ I GENERICI TERMINI DI ①, ②, ③ E ④, AVREMO CHE

$$x^\alpha \cdot x^\beta \cdot x^\gamma \cdot x^\delta = x^{99}$$

SE E SOLO SE

(12) $$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 99$$

MA I MODI DI SCEGLIERE α, β, γ E δ IN MODO CHE VALGA (12)

SONO IN TUTTO:

$$\frac{(99+3)!}{99!\cdot 3!} = \frac{102\cdot 101\cdot 100}{3\cdot 2\cdot 1} = 171700$$

QUINDI IN $(P(x))^6$ IL TERMINE DI GRADO 99 HA COEFFICIENTE 171700.
CIÒ SIGNIFICA CHE QUESTO È IL VALORE DELLA NOSTRA SOMMA.

GENERALIZZAZIONE CI SAREBBE MOLTO DA DIRE PRENDENDO SPUNTO DA QUESTO III METODO DI SOLUZIONE. AD ESEMPIO CI SI POTREBBE LANCIARE A DISCUTERE DI FUNZIONI GENERATRICI. PER RIMANERE SUL CONCRETO CI LIMITIAMO AD OSSERVARE CHE QUESTO METODO PERMETTE DI CALCOLARE SOMME BEN PIÙ GENERALI DI QUELLA DEL PROBLEMA 5. AD ESEMPIO LO STUDENTE PUÒ DIVERTIRSI A VERIFICARE CHE, SE INDICHIAMO CON $P(x)$ E $Q(x)$ GLI STESSI POLINOMI DEL PROBLEMA 5, ALLORA SI HA:

$$\sum_{\substack{a+b+c=102\\ a,b,c\in\mathbb{N}}} a\cdot b\cdot c = \text{COEFFICIENTE DI } x^{99} \text{ IN } (Q(x))^3 =$$

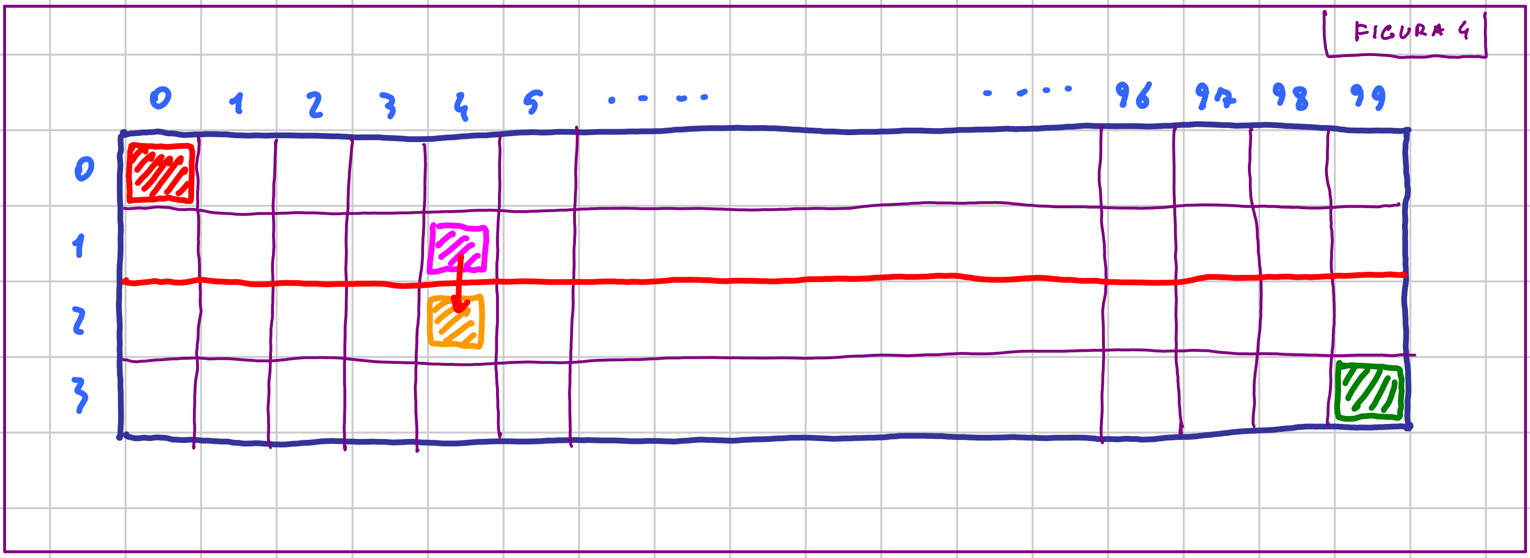
$$= \text{COEFFICIENTE DI } x^{99} \text{ IN } (P(x))^6 =$$

$$= \frac{(99+5)!}{99!\cdot 5!} = 91962520$$

È LA SOMMA DI TUTTI I POSSIBILI PRODOTTI DI 3 NUMERI INTERI POSITIVI LA CUI SOMMA È 102.

IV SOLUZIONE DEL PROBLEMA 5 INVENTIAMOCI UN PROBLEMA LA CUI SOLUZIONE SIA LA NOSTRA SOMMA MA CHE SAPPIAMO RISOLVERE ANCHE IN ALTRO MODO, PIÙ DIRETTO. IN TAL MODO IL RISULTATO CHE TROVIAMO RISOLVENDO IL PROBLEMA NEL MODO DIRETTO CI FORNIRÀ IL VALORE DELLA NOSTRA SOMMA.
IL PROBLEMA CHE CONSIDERIAMO È IL SEGUENTE:
UNA PULCE SI TROVA NELLA CASELLA ROSSA DELLA TABELLA IN FIGURA 4 E DEVE RAGGIUNGERE LA CASELLA VERDE FACENDO UNA SEQUENZA DI SALTI, CIASCUNO DEI QUALI PUÒ ESSERE DI UN

SOLO PASSO VERSO IL BASSO O VERSO DESTRA. QUANTI SONO I DIVERSI PERCORSI (= SEQUENZE DI PASSI) CHE LA PULCE PUÒ FARE?



SAPPIAMO GIÀ, DALLA LEZIONE 2, CHE IL NUMERO DI TALI PERCORSI È:

$$\binom{99+3}{3} = \frac{102 \cdot 101 \cdot 100}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 171700$$

BASTERÀ QUINDI RICONOSCERE CHE, PER QUALCHE MOTIVO, ANCHE LA NOSTRA SOMMA FORNISCE LA RISPOSTA A TALE PROBLEMA.
LA STRATEGIA SARÀ QUELLA DI FAR CORRISPONDERE A OGNI TERMINE DELLA SOMMA UN OPPORTUNO SOTTOINSIEME DI PERCORSI.
AD ESEMPIO, CHIEDIAMOCI QUANTI SONO, TRA TUTTI I PERCORSI DELLA PULCE, QUELLI CHE ATTRAVERSANO LA LINEA ROSSA IN CORRISPONDENZA DELLA COLONNA 4. SICCOME ABBIAMO:

$$\boxed{\text{PERCORSI TRA CASELLA ROSSA E CASELLA ROSA}} = \binom{4+1}{1} = 5$$

E:

$$\boxed{\text{PERCORSI TRA CASELLA ARANCIO E CASELLA VERDE}} = \binom{95+1}{1} = 96$$

OTTERREMO CHE:

$$\boxed{\text{PERCORSI PULCE CHE SCAVALCANO LINEA ROSSA IN COLONNA } 4} = 5 \cdot 96$$

SI NOTI CHE CON RAGIONAMENTO IDENTICO SI DIMOSTRA CHE, IN GENERALE:

$$\boxed{\text{PERCORSI PULCE CHE SCAVALCANO LINEA ROSSA IN COLONNA } K} = (k+1)(100-k)$$

PER OGNI $K = 0, 1, 2, \ldots, 99$.

QUINDI, PER OGNI K, IL TERMINE $(K+1)$-ESIMO DELLA NOSTRA SOMMA COINCIDE COL NUMERO DI PERCORSI CHE ATTRAVERSANO LA LINEA ROSSA IN CORRISPONDENZA DELLA COLONNA K.

QUINDI, POICHÉ OGNI PERCORSO ATTRAVERSA LA LINEA ROSSA IN UNO E UN SOLO PUNTO, LA NOSTRA SOMMA CI CONTA ESATTAMENTE TUTTI I PERCORSI, CHE SONO 171700.

DI CONSEGUENZA LA NOSTRA SOMMA VALE 171700.

GENERALIZZAZIONE SI PROVI, USANDO IL METODO DI QUESTA IV SOLUZIONE, A RISOLVERE LO STESSO PROBLEMA GIÀ RISOLTO NELLA GENERALIZZAZIONE DELLA III SOLUZIONE.

SUGGERIMENTO: SI USI UNA TABELLA CON 6 RIGHE TAGLIATE DA 2 LINEE ROSSE.
