Stage Urbi et Orbi - Exe. 4

Titolo nota

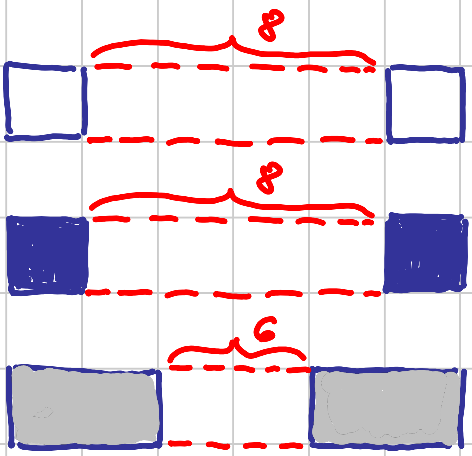
20 dicembre 2019 (16.00-17.30) - docente: Prof. **Roberto Tauraso** - Università di Roma ***Tor Vergata***

www.problemisvolti.it

TECNICHE DI COMBINATORIA
ALCUNI PROBLEMI DELLA GARA

PROBLEMA 16 VOGLIAMO TASSELLARE UNA STRISCIA DI 10 QUADRATI DI COLORE BIANCO O NERO E RETTANGOLI DI COLORE GRIGIO FORMATI UNENDO DUE QUADRATI. IN QUANTI MODI POSSIAMO FARLO SE VOGLIAMO COMINCIARE E FINIRE CON TASSELLI UGUALI?

IL VINCOLO DEI TASSELLI UGUALI ALLE ESTREMITÀ CI SUGGERISCE DI DISTINGUERE 3 CASI:



$$\longrightarrow a(8) = 985$$
$$+$$
$$\longrightarrow a(8) = 985$$
$$+$$
$$\longrightarrow a(6) = 169$$

$$\boxed{2139}$$

DOVE $a(n)$ È IL NUMERO DI RICOPRIMENTI CON I TRE TIPI DI TASSELLI SENZA IL VINCOLO CHE

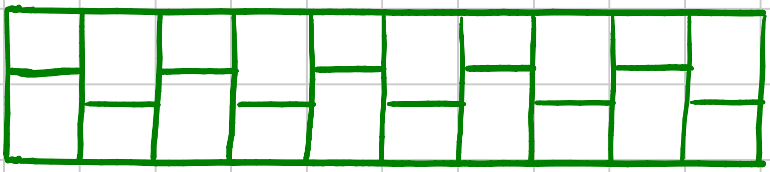
ALLE ESTREMITÀ I TASSELLI SIANO UGUALI.
RICORDANDO IL PROBLEMA 8 DEL 2018 SI NOTA CHE LA SEQUENZA $a(n)$ SODDISFA LA RICORSIONE

$$\begin{cases} a(n) = 2a(n-1) + a(n-2) & \text{PER } n \geq 3 \\ a(1) = 2, \quad a(2) = 5 \end{cases}$$

E QUINDI

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$a(n)$	2	5	12	29	70	169	408	985

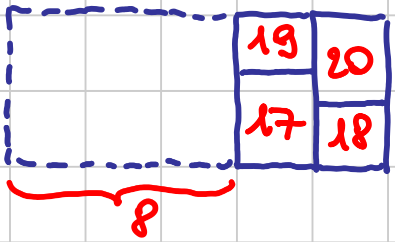
PROBLEMA 17 VOGLIAMO SCRIVERE I NUMERI INTERI DA 1 A 20, CIASCUNO ESATTAMENTE UNA VOLTA NELLE 20 CASELLE DELLA TABELLA



IN MODO CHE SE DUE CASELLE HANNO IN COMUNE UNA PARTE DI LATO VERTICALE, IL NUMERO SCRITTO IN QUELLA PIÙ A DESTRA È PIÙ GRANDE.
IN QUANTI MODI POSSIAMO FARLO SE VOGLIAMO CHE IL NUMERO 18 SIA NELL'ULTIMA COLONNA?

NOTIAMO CHE PER UNA TABELLA DI $2n$ CASELLE (E QUINDI CON n COLONNE), CI SONO 3 MODI PER RIEMPIRE L'ULTIMA COLONNA:

CIASCUNO DI QUESTI 3 CASI È IN ESATTA CORRISPONDEZA CON UNO DEI 3 MODI DI INSERIRE UNO DEI TASSELLI DEL PROBLEMA PRECEDENTE. TALE CORRISPONDENZA CI PERMETTE DI CONCLUDERE CHE IL 18 NELL'ULTIMA COLONNA FORZA IL RIEMPIMENTO DELLE ULTIME DUE E LE RESTANTI 8 COLONNE SI RIEMPIONO IN $a(8)$ MODI



$\rightarrow \quad a(8) = \boxed{985}$

PROBLEMA 11 QUANTI SONO GLI ANAGRAMMI DI "MATEMATICI" CHE INIZIANO CON LA LETTERA "C" E NON HANNO DUE LETTERE UGUALI?

DATO CHE LA LETTERA "C" OCCUPA LA PRIMA POSIZIONE RIMANE DA ANAGRAMMARE $M^2A^2T^2I^2E$.
SE S_M, S_A, S_T, S_I INDICANO RISPETTIVAMENTE GLI INSIEMI DI ANAGRAMMI CON DUE M, A, T, I VICINE

PER IL PRINCIPIO DI INCLUSIONE-ESCLUSIONE (P.I.E.) ABBIAMO CHE LA RISPOSTA È

$$\frac{9!}{2^4} - |S_M \cup S_A \cup S_T \cup S_I| =$$

$$= \underset{\text{TUTTI GLI ANAGRAMMI}}{\frac{9!}{2^4}} - \left[\underset{\text{INSIEMI SINGOLI}}{4 \cdot \frac{8!}{2^3}} - \underset{\text{INTERSEZIONI A 2}}{\binom{4}{2}\frac{7!}{2^2}} + \underset{\text{INTERSEZIONI A 3}}{\binom{4}{3}\frac{6!}{2}} - \underset{\text{INTERSEZIONI A 4}}{5!} \right]$$

$$= \boxed{8760}$$

PROBLEMA 13 QUANTI SONO I NUMERI DI 8 CIFRE FORMATI DA 1 E 2 IN CUI ESISTE ALMENO UNA CIFRA 2 PRECEDUTA E SEGUITA DA UN 1?

PER $i = 1, 2, \dots, 6$ CONSIDERIAMO GLI INSIEMI

$$A_i = \left\{ \begin{array}{l} \text{NUMERI DI 8 CIFRE IN } \{1,2\} \text{ CON} \\ \text{ALMENO UN BLOCCO 121 CON IL} \\ \text{PRIMO 1 NELLA POSIZIONE } i\text{-SIMA} \end{array} \right\}$$

AD ESEMPIO 21212122 STA IN $A_2 \cap A_4$. DOBBIAMO CONTARE I NUMERI CHE CONTENGONO ALMENO UN "BLOCCO" 121 OSSIA

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6|$$

OSSERVIAMO CHE

$$|A_i| = 2^5$$ 5 CASELLE DA RIEMPIRE CON 1 O 2

LE INTERSEZIONI A 2 SONO DI DUE TIPI:

$\underbrace{\ldots}_{x_1} 121 \underbrace{\ldots}_{x_2} 121 \underbrace{\ldots}_{x_3}$ $\quad x_1+x_2+x_3 = 8-6=2, \; x_i \geq 0$

$\binom{2+2}{2} = 6$ SOLUZIONI

$\underbrace{\ldots}_{x_1} 12121 \underbrace{\ldots}_{x_2}$ $\quad x_1+x_2 = 8-5=3, \; x_i \geq 0$

$\binom{3+1}{1} = 4$ SOLUZIONI

QUINDI

$$\sum_{i<j} |A_i \cap A_j| = 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 = 56.$$

LE INTERSEZIONI A 3 SONO:

12112121, 12121121, 11212121,
21212121, 12121211, 12121212.

QUINDI $\displaystyle\sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| = 6.$

LE INTERSEZIONI A $n \geq 4$ SONO VUOTE.

COSÌ PER P.I.E:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6| = 6 \cdot 2^5 - 56 + 6$$
$$= \boxed{142}$$

PROBLEMA 15 CIASCUNA DELLE 8 FACCE (BASE COMPRESA) DI UNA PIRAMIDE ETTAGONALE VIENE COLORATA DI BLU, VERDE, GIALLO, ARANCIO O ROSSO, CON L'OBBLIGO DI USARE TUTTI I COLORI. QUANTE SONO LE DIVERSE COLORAZIONI POSSIBILI?

IL COLORE PER LA BASE PUÒ ESSERE SCELTO IN 5 MODI. DATO CHE C'È L'OBBLIGO DI USARE TUTTI E 5 I COLORI, PER LE 7 FACCE LATERALI ABBIAMO DUE POSSIBILITÀ:

1) USIAMO TUTTI I 5 COLORI SULLE 7 FACCE

$\underbrace{3+1+1+1+1}_{5\text{ COLORI}} = 7 \text{ FACCE} \longrightarrow 5\cdot\frac{7!}{3!}$

$\underbrace{2+2+1+1+1}_{5\text{ COLORI}} = 7 \text{ FACCE} \longrightarrow \binom{5}{2}\cdot\frac{7!}{2!\cdot 2!}$

$\rightarrow 7\cdot 2400$

2) USIAMO TUTTI I RESTANTI 4 COLORI SULLE 7 FACCE

$\underbrace{4+1+1+1}_{4\text{ COLORI}} = 7 \text{ FACCE} \longrightarrow 4\cdot\frac{7!}{4!}$

$\underbrace{3+2+1+1}_{4\text{ COLORI}} = 7 \text{ FACCE} \longrightarrow 4\cdot 3\cdot\frac{7!}{2!\,3!}$

$\underbrace{2+2+2+1}_{4\text{ COLORI}} = 7 \text{ FACCE} \longrightarrow 4\cdot\frac{7!}{2!\,2!\,2!}$

$\rightarrow 7\cdot 1200$

APPLICHIAMO IL LEMMA DI BURNSIDE CONSIDERANDO CHE L'UNICA ROTAZIONE CON CONFIGURAZIONI INVARIANTI È L'IDENTITÀ R_0.

COSÌ LA RISPOSTA È

$$5 \cdot \frac{|\operatorname{inv}(R_0)|}{7} = 5 \cdot (2400 + 1200) = \boxed{18000}$$

$\boxed{\text{PROBLEMA 24}}$ CIASCUNA DELLE 8 FACCE (BASE COMPRESA) DI UNA PIRAMIDE ETTAGONALE VIENE COLORATA DI BLU, VERDE, GIALLO, ARANCIO O ROSSO, SENZA L'OBBLIGO DI USARE TUTTI I COLORI IN MODO CHE OGNI EVENTUALE FACCIA ROSSA ABBIA IN COMUNE ESATTAMENTE UN LATO CON UN'ALTRA FACCIA ROSSA MENTRE PER TUTTI GLI ALTRI COLORI NON CI SIANO FACCE DELLO STESSO COLORE CON LATI IN COMUNE. QUANTE SONO LE DIVERSE COLORAZIONI POSSIBILI?

DISTINGUIAMO 4 CASI DISGIUNTI:

1) NON CI SONO FACCE ROSSE.

4 MODI DI SCEGLIERE IL COLORE DELLA BASE

$2^7 - 2 = 126$ MODI DI COLORARE LE 7 FACCE LATERALI CON IN 3 COLORI RIMASTI

$$4 \cdot 126 = 502 = 7 \cdot 72.$$

2) 2 FACCE ROSSE: LA BASE E UNA FACCIA LATERALE.

7 MODI PER SCEGLIERE LA FACCIA LATERALE

$4 \cdot 3^5$ MODI PER COLORARE LE RESTANTI 6

FACCE LATERALI CON I 4 COLORI RIMASTI.

$$7 \cdot 4 \cdot 3^5 = 7 \cdot 972.$$

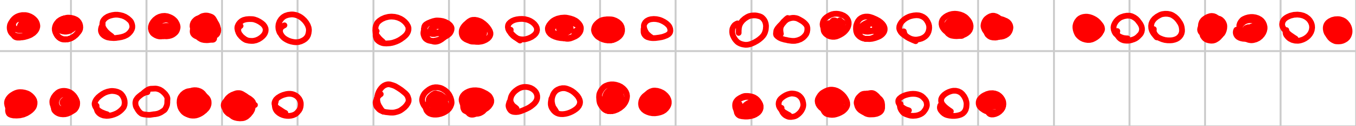
3) 2 FACCE ROSSE: 2 FACCE LATERALI ADIACENTI.

7 MODI DI SCEGLIERE LE DUE FACCE LATERALI ADIACENTI ROSSE. 4 MODI DI SCEGLIERE IL COLORE DELLA BASE. $3 \cdot 2^4$ MODI DI COLORARE LE RESTANTI 5 FACCE LATERALI CON I 3 COLORI RIMASTI

$$7 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2^4 = 7 \cdot 192.$$

4) 4 FACCE LATERALI ROSSE

7 MODI DI SCEGLIERE LE QUATTRO FACCE



4 MODI DI COLORARE LA BASE. $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ MODI DI COLORARE LE RESTANTI 3 FACCE LATERALI CON I 3 COLORI RIMASTI

$$7 \cdot 4 \cdot 18 = 7 \cdot 72$$

INFINE PER IL LEMMA DI BURNSIDE SOMMIAMO TUTTI I CONTRIBUTI E DIVIDIAMO PER 7:

$$72 + 972 + 192 + 72 = \boxed{1308}$$