Stage Urbi et Orbi - Exe. 5

Titolo nota

24 gennaio 2020 (16:00-17:30) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

www.problemisvolti.it

ALGEBRA – ALCUNI PROBLEMI DELLA GARA

[VERRANNO SVOLTI I PROBLEMI $\boxed{1}$, $\boxed{4}$, $\boxed{15}$, $\boxed{17}$ E $\boxed{24}$, MENTRE DEI PROBLEMI $\boxed{21}$ E $\boxed{23}$ SONO GIÀ STATI LINKATI I VIDEO CON GLI SVOLGIMENTI NELLA PAGINA DELLO STAGE.]

PROB. 1 TROVARE IL MINIMO INTERO $n \geq 2015$ PER IL QUALE ESISTE UN POLINOMIO NON COSTANTE $P(x)$ TALE CHE $P(P(P(P(x)))) = (P(x^n))^n$.

SVOLGIMENTO DETTO $k \geq 1$ IL GRADO DI $P(x)$, SE VALE L'IDENTITÀ:

$$P(P(P(P(x)))) = (P(x^n))^n \tag{1}$$

IN PARTICOLARE DEVONO ESSERE UGUALI I GRADI DEI 2 MEMBRI, CIOÈ DEVE ESSERE $k^4 = n \cdot k \cdot n$, OVVERO $k^3 = n^2$.

D'ALTRA PARTE, SE n E k SODDISFANO $k^3 = n^2$, PER SODDISFARE (1) BASTA PRENDERE $P(x) = x^k$.

POSSIAMO QUINDI CONCLUDERE CHE ESISTE UN POLINOMIO NON COSTANTE CHE SODDISFA (1) SE E SOLO SE ESISTE UN INTERO $k \geq 1$ TALE CHE $k^3 = n^2$.

MA CIÒ EQUIVALE A DIRE CHE n DEVE ESSERE UN CUBO. QUINDI DOBBIAMO TROVARE IL PIÙ PICCOLO CUBO NON MINORE DI 2015, CHE È $n = 13^3 = 2197$, VISTO CHE $12^3 = 1728 < 2015$.

PROB. 4 DATO $P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$ INDICHIAMO CON $Q(x)$ IL POLINOMIO CHE SI OTTIENE SVILUPPANDO $(P(x))^5$ E SOMMANDO TRA LORO I TERMINI SIMILI. QUAL È LA SOMMA DEI COEFFICIENTI DI $Q(x)$?

SVOLGIMENTO SI OSSERVI CHE DATO UN QUALSIASI POLINOMIO $A(x)$ DEL TIPO:

$$A(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_2x^2+a_1x+a_0$$

SI HA:

$$A(1)=a_n\cdot 1^n+a_{n-1}\cdot 1^{n-1}+\dots+a_2\cdot 1^2+a_1\cdot 1+a_0=$$

$$=a_n+a_{n-1}+\dots+a_2+a_1+a_0$$

OVVERO VALE LA SEMPLICE REGOLA: LA SOMMA DEI COEFFICIENTI DI UN POLINOMIO IN FORMA NORMALE COINCIDE COL SUO VALORE CALCOLATO PER $x=1$.
QUINDI PER TROVARE LA SOMMA DEI COEFFICIENTI DI $Q(x)=(P(x))^5$ NON C'È DAVVERO BISOGNO DI SVILUPPARE I CALCOLI DI $(P(x))^5$ MA BASTA CALCOLARE:

$$Q(1)=(P(1))^5=(1-2+3-4+5)^5=3^5=243.$$

PROB.15 DATO $P(x)=x^6+12^3$, SIANO $P_1(x)$, $P_2(x)$ E $P_3(x)$ TRE POLINOMI DI 2° GRADO A COEFFICIENTI INTERI IL CUI PRODOTTO SIA $P(x)$. SIA S_1 LA SOMMA DEI COEFFICIENTI DI $P_1(x)$, S_2 QUELLA DI $P_2(x)$ ED S_3 QUELLA DI $P_3(x)$. CALCOLARE $S_1+S_2+S_3$.

SVOLGIMENTO SCOMPONIAMO $P(x)$. SI HA:

$$P(x)=x^6+12^3=(x^2+12)(x^4-12x^2+12^2)=$$
$$=(x^2+12)(x^4+24x^2+12^2-36x^2)=$$
$$=(x^2+12)\left((x^2+12)^2-(6x)^2\right)=$$
$$=(x^2+12)(x^2+12+6x)(x^2+12-6x)$$

A QUESTO PUNTO LA SCOMPOSIZIONE È CONCLUSA PERCHÉ I 3 POLINOMI DI 2° GRADO HANNO $\Delta<0$. QUINDI:

$$P_1(x)=x^2+12 \qquad P_2(x)=x^2+6x+12 \qquad P_3(x)=x^2-6x+12$$

PERCIÒ $S_1=13$, $S_2=19$ E $S_3=7$, DA CUI SEGUE $S_1+S_2+S_3=39$.
SI NOTI CHE, TRATTANDOSI DI POLINOMI MONICI, LA RICHIESTA CHE SIANO A COEFFICIENTI INTERI LI IDENTIFICA IN MODO UNIVOCO. SE INVECE SI FOSSERO RICHIESTI POLINOMI A COEFFICIENTI ANCHE NON INTERI LA SCOMPOSIZIONE NON ERA UNIVOCA, MA DETERMINATA A MENO DI UNA COSTANTE. AD ESEMPIO FUNZIONAVA ANCHE:

$$q_1(x)=10P_1(x) \qquad q_2(x)=\frac{1}{2}P_2(x) \qquad q_3(x)=\frac{1}{5}P_3(x).$$

PROB. 17 TROVARE IL PIÙ GRANDE VALORE DI x CHE SODDISFA LA DISEQUAZIONE:

(2) $$\sqrt{128(14-x)(1+x)^3} \geq 13x^2-4x+208$$

SVOLGIMENTO L'USUALE METODO SCOLASTICO PORTEREBBE AD EQUAZIONI DI GRADO TROPPO ALTO QUINDI SERVE UN'IDEA ALTERNATIVA.

A TALE SCOPO RISCRIVIAMO IL SECONDO MEMBRO IN MODO DA FAR COMPARIRE TERMINI SIMILI A QUELLI DEL PRIMO. SI HA:

$$13x^2-4x+208 = x^2-28x+196+12x^2+24x+12 =$$
$$= (x-14)^2+12(x+1)^2$$

QUINDI LA (2) PUÒ ESSERE RISCRITTA:

$$\sqrt{128(14-x)(1+x)^3} \geq (x-14)^2+12(x+1)^2$$

OPPURE, MEGLIO ANCORA:

(3) $$\sqrt{(14-x)(2+2x)^3} \geq \frac{(x-14)^2+3(2x+2)^2}{4}$$

OSSERVIAMO CHE IL PRIMO MEMBRO HA SENSO SE E SOLO SE:

(4) $$-1 \leq x \leq 14.$$

IMPONENDO LA CONDIZIONE (4), LA (3) EQUIVALE A:

$$\sqrt[4]{(14-x)^2(2+2x)^6} \geq \frac{(x-14)^2+3(2x+2)^2}{4}$$

OPPURE, MEGLIO ANCORA:

(5) $$\sqrt[4]{(x-14)^2\cdot(2x+2)^2\cdot(2x+2)^2\cdot(2x+2)^2} \geq \frac{(x-14)^2+(2x+2)^2+(2x+2)^2+(2x+2)^2}{4}$$

MA A CAUSA DELLA DISUGUAGLIANZA TRA MEDIA ARITMETICA E MEDIA GEOMETRICA, LA (5) NON È MAI SODDISFATTA, TRANNE CHE PER GLI x PER I QUALI I 4 NUMERI SONO TUTTI UGUALI, CIOÈ TALI CHE:

$$(x-14)^2 = (2x+2)^2$$

CHE SONO SOLO $x=-16$ E $x=4$.

MA SICCOME SOLO $x=4$ SODDISFA LA CONDIZIONE (4), POSSIAMO CONCLUDERE CHE LA DISEQUAZIONE (2) È SODDISFATTA SOLO PER $x=4$. IN PARTICOLARE IL PIÙ GRANDE x CHE SODDISFA (2) È PROPRIO L'UNICO x CHE LA SODDISFA, CIOÈ $x=4$.

PROB. 24 TROVARE IL MINIMO VALORE DI n PER IL QUALE, PER OGNI a,b,c NELL'INTERVALLO $(0,1)$, SI ABBIA:

$$\frac{a^{3}\cdot b^{7}\cdot c^{n}}{\left(a^{210}+b^{210}+c^{3003}\right)\cdot\left(a^{210}+b^{3003}+c^{210}\right)\cdot\left(a^{3003}+b^{210}+c^{210}\right)}\le 2020 \qquad (6)$$

SVOLGIMENTO MOSTREREMO CHE LA (6) VALE PER $n\ge 3280$ E QUINDI IL MINIMO n PER CUI È VERIFICATA È PROPRIO $n=3280$.

PER COMODITÀ PREMETTIAMO UN LEMMA:

LEMMA 1 SIANO x,y,z TALI CHE $0<x<1$, $0<y<1$ E $0<z<1$ E SIANO $\alpha,\beta,\gamma,\delta>0$ CON $\alpha+\beta+\gamma\ge\delta$. ALLORA VALE LA DISUGUAGLIANZA:

$$\frac{x^{\alpha}\cdot y^{\beta}\cdot z^{\gamma}}{x^{\delta}+y^{\delta}+z^{\delta}}\le 1$$

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA 1 NEL CASO PARTICOLARE $\alpha+\beta+\gamma=\delta$ SI HA:

$$\frac{\alpha}{\delta}+\frac{\beta}{\delta}+\frac{\gamma}{\delta}=1$$

QUINDI:

$$\frac{x^{\alpha}\cdot y^{\beta}\cdot z^{\gamma}}{x^{\delta}+y^{\delta}+z^{\delta}}=\frac{x^{\alpha}}{\left(x^{\delta}+y^{\delta}+z^{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{\delta}}}\cdot\frac{y^{\beta}}{\left(x^{\delta}+y^{\delta}+z^{\delta}\right)^{\frac{\beta}{\delta}}}\cdot\frac{z^{\gamma}}{\left(x^{\delta}+y^{\delta}+z^{\delta}\right)^{\frac{\gamma}{\delta}}}\le$$

$$\le\frac{x^{\alpha}}{\left(x^{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{\delta}}}\cdot\frac{y^{\beta}}{\left(y^{\delta}\right)^{\frac{\beta}{\delta}}}\cdot\frac{z^{\gamma}}{\left(z^{\delta}\right)^{\frac{\gamma}{\delta}}}=$$

$$=\frac{x^{\alpha}}{x^{\alpha}}\cdot\frac{y^{\beta}}{y^{\beta}}\cdot\frac{z^{\gamma}}{z^{\gamma}}=1\cdot 1\cdot 1=1$$

QUESTO DIMOSTRA LA DISUGUAGLIANZA NEL CASO $\alpha+\beta+\gamma=\delta$.

SE INVECE FOSSE $\alpha+\beta+\gamma>\delta$ BASTA PRENDERE α', β' E γ', CON $0<\alpha'<\alpha$, $0<\beta'<\beta$, $0<\gamma'<\gamma$ E $\alpha'+\beta'+\gamma'=\delta$, PER OTTENERE:

$$\frac{x^{\alpha}\cdot y^{\beta}\cdot z^{\gamma}}{x^{\delta}+y^{\delta}+z^{\delta}} \overset{\text{PERCHÉ } x\le 1,\ y\le 1 \text{ E } z\le 1}{\le} \frac{x^{\alpha'}\cdot y^{\beta'}\cdot z^{\gamma'}}{x^{\delta}+y^{\delta}+z^{\delta}} \overset{\text{PERCHÉ } \alpha'+\beta'+\gamma'=\delta}{\le} 1$$

SVOLGIMENTO DEL PROB. 24 VALGONO LE TRE DISUGUAGLIANZE

(7)
$$\frac{c^{210}}{a^{210}+b^{3003}+c^{210}} \le 1$$

PERCHÉ BANALMENTE IL DENOMINATORE È PIÙ GRANDE

(8)
$$\frac{c^{210}}{a^{3003}+b^{210}+c^{210}} \le 1$$

APPLICANDO IL LEMMA 1 CON $x=a$, $y=b$ E $z=c^{\frac{143}{10}}$

(9)
$$\frac{a^{3}\cdot b^{7}\cdot c^{2860}}{a^{210}+b^{210}+c^{3003}} = \frac{a^{3}\cdot b^{7}\cdot \left(c^{\frac{143}{10}}\right)^{200}}{a^{210}+b^{210}+\left(c^{\frac{143}{10}}\right)^{210}} \le 1$$

MOLTIPLICANDO (7), (8) E (9) MEMBRO A MEMBRO (SI PUÒ PERCHÉ SONO POSITIVE) SI OTTIENE:

$$\frac{a^{3}\cdot b^{7}\cdot c^{2860+210+210}}{\left(a^{210}+b^{210}+c^{3003}\right)\cdot\left(a^{210}+b^{3003}+c^{210}\right)\cdot\left(a^{3003}+b^{210}+c^{210}\right)} \le 1$$

DA CUI SEGUE CHE PER $n=2860+210+210=3280$ LA (6) VALE.

RIMANE DA DIMOSTRARE CHE PER $n<3280$ LA (6) NON VALE.

A TALE SCOPO VERIFICHIAMO CHE SE $n=3280-k$, CON $k>0$, POSSIAMO RENDERE ARBITRARIAMENTE GRANDE IL PRIMO MEMBRO DI (6) PUR DI SCEGLIERE OPPORTUNAMENTE PICCOLI a, b E c.

PER OGNI t TALE CHE $0<t<1$, PRENDIAMO:

(10)
$$a=t^{\frac{143}{10}}, \quad b=t^{\frac{143}{10}}, \quad c=t.$$

OSSERVIAMO CHE SE $0<t<1$ ANCHE a, b E c STANNO TRA 0 E 1. SOSTITUENDO (10) NEL PRIMO MEMBRO DELLA (6)

CON $3280-k$ AL POSTO DI n SI HA:

DIVIDENDO NUMERATORE E DENOMINATORE PER t^{3423}

$$\frac{t^{\frac{143}{70}\cdot 3}\cdot t^{\frac{143}{70}\cdot 7}\cdot t^{3280-k}}{\left(t^{3003}+t^{3003}+t^{3003}\right)\cdot\left(t^{3003}+t^{\frac{143}{70}\cdot 3003}+t^{210}\right)\left(t^{\frac{143}{70}\cdot 3003}+t^{3003}+t^{210}\right)} =$$

$$= \frac{t^{-k}}{\left(1+1+1\right)\cdot\left(t^{2793}+t^{\frac{143}{70}\cdot 3003-210}+1\right)\left(t^{\frac{143}{70}\cdot 3003-210}+t^{2793}+1\right)} \geq$$

RICORDANDO CHE, ESSENDO $0<t<1$, ANCHE LE SUE POTENZE CON ESPONENTE POSITIVO SONO COMPRESE TRA 0 E 1.

$$\geq \frac{t^{-k}}{\left(1+1+1\right)\cdot\left(1+1+1\right)\cdot\left(1+1+1\right)} = \frac{1}{27}\cdot\frac{1}{t^k}$$

A QUESTO PUNTO BASTA OSSERVARE CHE $\frac{1}{t^k}$ PUÒ ESSERE RESO ARBITRARIAMENTE GRANDE PUR DI PRENDERE t SUFFICIENTEMENTE PICCOLO.