28 Ottobre 2019 - ore 14:30/17:30

Lezione 2B - Combinatoria Zero

docente: prof. Emanuele Callegari (Univ. di Roma "Tor Vergata")

Nella lezione ho svolto alcuni dei problemi che propongo (e svolgo) nell'eserciziario di "Combinatoria Zero" che sto preparando per lo stage.
Nelle pagine successive vi propongo un piccolo estratto dell'eserciziario contenente i problemi che ho svolto a lezione.
Ovviamente, essendo una bozza, potrebbe contenere errori.
Vi sarò grato se me li segnalerete.
Buona lettura.

Emanuele Callegari

[...]

Capitolo II

Problemi proposti

[...]

84. Quante sono le parole di 8 lettere (anche senza senso) contenenti solo vocali (cioè A, E, I, O, U) e tali che le lettere che vi compaiono siano disposte in ordine alfabetico?

[...]

91. In quanti modi posso scegliere un insieme di 5 numeri interi tra 1 e 20 in modo che la differenza tra due qualsiasi di essi sia almeno 4?

92. Quanti sono gli anagrammi, anche senza senso, della parola **NEOZOICO** che non hanno consonanti consecutive?

[...]

96. Sia dato un grande pavimento rettangolare avente i lati di 54m e 36m. Vogliamo ricoprirlo con piastrelle rettangolari in modo che valgano le seguenti proprietà:

1. il pavimento è completamente ricoperto dalle piastrelle senza bisogno che queste vengano tagliate;
2. le misure dei lati delle piastrelle, espresse in centimetri, sono intere;
3. le piastrelle sono tutte uguali e vengono posate con la stessa orientazione, cioè, se non sono quadrate, vengono messe in modo che i lati lunghi di tutte le piastrelle siano paralleli tra loro.

Quanti sono i diversi tipi di piastrelle con le quali si può fare? (contando anche i casi con scarso valore pratico, come il caso di un'unica grande piastrella che copre tutto il pavimento)

97. In ogni casella di una scacchiera rettangolare 6×8 si vuole scrivere un numero intero strettamente positivo e non superiore a 14. In quanti modi è possibile farlo, rispettando l'ordinamento parziale delle caselle? (cioè facendo in modo che su ogni riga i numeri siano in ordine strettamente crescente passando da sinistra a destra, e su ogni colonna siano in ordine strettamente crescente passando dal basso all'alto)

[...]

99. In una scacchiera 8×8 le righe sono numerate da 1 a 8 e le colonne sono contrassegnate con le lettere che vanno dalla a alla h (esattamente come nel gioco degli scacchi).
Una pulce, situata inizialmente nella casella $b2$, si sposta saltando: i salti ammessi sono solo quelli tra due caselle adiacenti, cioè due caselle distinte aventi un lato in comune.
Determinare quanti sono i percorsi che portano la pulce dalla casella $b2$ alla casella $g7$ che sono composti **esattamente da 12 salti** e che non passano mai due volte per la stessa casella.

[...]

101. Claudia riceve una lista di n numeri interi positivi tutti diversi, scritti in ordine casuale. Vince se riesce a estrarne una sottolista di 50 numeri, che conservi l'ordine della lista di partenza e che si presenti ordinata in ordine crescente o decrescente. Altrimenti Claudia perde.
Qual è il minimo valore di n per il quale Claudia è sicura di vincere, qualsiasi sia la lista di n numeri che gli viene data? (se tale n è maggiore di 9999 o se si ritiene che Claudia non possa mai essere sicura di vincere, indicare come risposta 9999.)

[...]

Capitolo III

Soluzioni dei problemi proposti

[...]

Soluzione di 84. La risposta esatta è 495.
In ognuna delle parole prese in considerazione, le lettere che la compongono sono sempre messe in ordine alfabetico. Di conseguenza, ogni parola è univocamente determinata una volta che siano state scelte le lettere per comporla. Ciò significa che, per rispondere al quesito, basta trovare in quanti modi si possono scegliere 8 lettere che siano tutte vocali.
Questo è un problema che conosciamo già: se immaginiamo che ad ogni vocale corrisponda un bimbo a cui diamo tante caramelle quante sono le volte che la corrispondente vocale viene scelta, il nostro problema equivale a contare in quanti modi diversi posso distribuire 8 caramelle a 5 bimbi.
Sappiamo già che tale numero di modi è:

$$\binom{8+5-1}{8} = \frac{12!}{8! \cdot 4!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 495,$$

che quindi è anche la soluzione del nostro problema.

[...]

Soluzione di 91. La risposta corretta è: 56.

Per fissare le idee immaginiamo che i numeri da 1 a 20 siano scritti in sequenza su una riga di 20 caselle: in tal modo scegliere un certo sottoinsieme di numeri equivale ad annerire le corrispondenti caselle.
Ad esempio la scelta del sottoinsieme {2, 7, 11, 15, 20} equivale ad annerire la nostra riga di caselle nel modo seguente:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**

figura 1

A questo punto possiamo anche cancellare i numeri e conservare solo la riga di caselle:

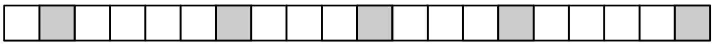

figura 2

perché a partire da essa possiamo sempre risalire a quali sono i numeri scelti.
Si noti, per inciso, che l'insieme dell'esempio è **buono**, cioè soddisfa le condizioni richieste dal problema, visto che la differenza tra due qualsiasi numeri scelti è sempre maggiore o uguale a 4.
Si osservi che un qualsiasi insieme scelto è **buono** se e solo se, nella riga di caselle che lo rappresenta, le caselle annerite sono sempre separate tra loro da almeno 3 caselle bianche (vedi esempio in figure 1 e 2).
Il nostro problema quindi equivale a contare i quanti modi diversi posso allineare 20 caselle (15 bianche e 5 grigie) in modo che 2 caselle grigie siano sempre separate da almeno 3 caselle bianche.
Per costruire la riga di caselle immaginiamo di piazzare prima le caselle grigie, lasciando tra esse dello spazio per inserire le caselle bianche, come vediamo in figura:

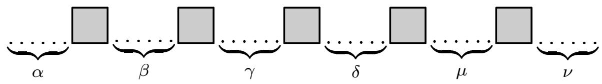

figura 3

Le caselle bianche possono essere inserite in 6 possibili posizioni: α, β, γ, δ, μ e ν. Tuttavia in ciascuna delle posizioni non estremali, cioè β, γ, δ e μ, devo inserirne almeno 3. Ciò significa che 12 delle 15 caselle bianche possono essere piazzate in un solo modo mentre ciascuna delle rimanenti 3 può essere inserita in una qualsiasi delle 6 posizioni.
Il nostro problema quindi equivale a contare in quanti modi posso piazzare le 3 caselle bianche rimanenti nelle 6 posizioni disponibili (eventualmente anche tutte nella stessa posizione).
Tale problema, nomi a parte, è equivalente ad un problema di combinatoria elementare che conosciamo già: in quanti modi (anche ingiusti) posso distribuire 3 caramelle a 6 bimbi.
Sappiamo già che la risposta è:

$$\binom{3+6-1}{6-1} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56,$$

che quindi è anche la risposta del nostro problema.

$\boxed{\texttt{Soluzione di 92.}}$ La risposta corretta è 2400.

Per cominciare osserviamo che anche la parola **NEOZOICO** soddisfa la condizione richiesta, come possiamo vedere in figura 4, dove abbiamo segnato in grigio i posti delle consonanti e in bianco quelli delle vocali.

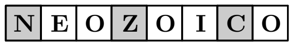

figura 4

Se per un attimo consideriamo solo la configurazione di posti consonanti/vocali, come vediamo in figura 5:

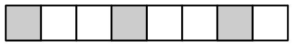

figura 5

possiamo chiederci quanti sono gli anagrammi che hanno quella stessa configurazione di posti.
Si trova subito che le 3 consonanti, che sono tutte diverse, si possono distribuire tra le 3 caselle grigie in 3! modi, cioè in 6 modi.
Invece le 5 vocali si possono distribuire tra le 5 caselle bianche in tanti modi quanti sono gli anagrammi della parola **EOOIO**, che sono $\frac{5!}{3! \cdot 1! \cdot 1!}$, cioè 20.
Ciò significa che gli anagrammi che hanno una configurazione di posti consonanti/vocali come quella di figura 5 sono in tutto $6 \cdot 20$, cioè 120.
Ovviamente questo vale per ogni configurazione di posti fissata. Ad esempio, ragionando in modo identico si conclude che sono 120 anche gli anagrammi che hanno come configurazione di posti consonanti/vocali quella di figura 6:

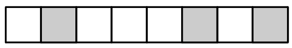

figura 6

Per risolvere il nostro problema basterà quindi contare quante sono le configurazioni ammissibili di posti consonanti/vocali e poi moltiplicare tale numero per 120.
Siccome la condizione da rispettare è che le consonanti non siano mai vicine tra loro, le configurazioni ammissibili sono tutte e sole quelle in cui le 3 caselline grigie non si toccano.
Dobbiamo quindi contare quante sono le striscie di 8 caselle (3 grigie e 5 bianche) in cui le caselle grigie non si toccano tra loro.
A tale scopo cominciamo posizionando le 3 caselle grigie come in figura 7:

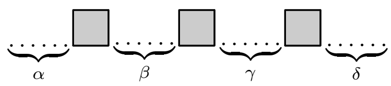

figura 7

Dopo aver piazzato una casella bianca in β e un'altra in γ, necessarie a separare le caselle grigie tra loro, basta contare in quanti modi diversi posso distribuire le rimanenti 3 caselle bianche tra le 4 posizioni α, β, γ e δ.
Questo problema è chiaramente identico a quello (già risolto) di contare in quanti modi posso distribuire 3 caramelle a 4 bimbi: infatti le 3 caramelle sono le 3 caselle bianche mentre i 4 bimbi sono le posizioni α, β, γ e δ.
Sappiamo che la soluzione di tale problema standard di combinatoria elementare è: $\binom{3+4-1}{4-1}$,

cioè 20.
Questo significa che le configurazioni ammissibili di posti consonante/vocale sono 20.
Poiché abbiamo già visto che a ciascuna configurazione corrispondono 120 anagrammi, in tutto gli anagrammi saranno $20 \cdot 120$, cioè 2400.
Questo conclude la soluzione del nostro problema.

[...]

Soluzione di 96. La risposta corretta è 1530.
Per cominciare osserviamo che, per andar bene, una piastrella deve avere un lato che divide 3600 e l'altro che divide 5400. I divisori di 3600 sono 45, perché $3600 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ e quindi i divisori sono $5 \cdot 3 \cdot 3$. Analogamente si trova che i divisori di 5400 sono 48. Quindi i 2 lati della piastrella possono essere scelti in $45 \cdot 48$ modi, cioè in 2160.
Tuttavia bisogna fare attenzione al fatto che, in questo modo, alcune piastrelle sono state contate 2 volte. Ad esempio, visto che 6 e 9 sono divisori sia di 3600 che di 5400, è stata contata sia la piastrella 6×9 che la piastrella 9×6, che però sono identiche.
Bisognerà quindi determinare quante sono le piastrelle che sono state contate 2 volte in modo da poterle togliere dal totale.
A tale scopo si noti che una piastrella è contata 2 volte se e solo se i suoi lati sono diversi e dividono entrambi sia 5400 che 3600. Ma i divisori comuni di 5400 e 3600 sono tutti e soli i divisori del loro MCD, cioè di 1800, che sono 36.
Ne segue che le piastrelle contate 2 volte sono tante quanti sono i modi di scegliere 2 numeri diversi tra i 36 divisori di 1800, cioè $\binom{36}{2}$, cioè 630.
Si può quindi concludere che le piastrelle che vanno bene (contate una volta sola) sono $2160 - 630$, cioè 1530.

Soluzione di 97. La risposta corretta è 3003.
Per capire meglio come procedere ragioniamo prima su un caso particolare.
Un esempio di tabella di numeri **buona**, cioè che rispetti le proprietà richieste dal problema, è la seguente:

6	**7**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
5	**6**	**7**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
4	**5**	**6**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
3	**4**	**5**	**6**	**7**	**9**	**10**	**11**
2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**9**	**10**
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**

figura 8

Adottiamo la convenzione che in ogni tabella le colonne sono numerate da 0 a 7, partendo da sinistra, mentre le righe sono numerate da 0 a 5, partendo dal basso.
Inoltre conveniamo che la casella della tabella $\mathbf{T}$ che sta nella $n-$esima colonna e nella $m-$esima riga verrà indicata con $\mathbf{T}(n,m)$. Ad esempio, se $\mathbf{T}$ indica la tabella di figura **8**, si ha $\mathbf{T}(0,0) = 1$ e $\mathbf{T}(7,5) = 14$.
Si noti che, qualsiasi sia la tabella $\mathbf{M}$, la casella $\mathbf{M}(n,m)$ si raggiunge partendo dalla casella $\mathbf{M}(0,0)$ facendo n spostamenti di un passo verso destra ed m di un passo verso l'alto. Visto

che ad ogni passo, il valore della casella di arrivo deve essere maggiore di quello della casella di partenza, per ogni n e per ogni m avremo

$$\mathbf{M}(n,m) \geq \mathbf{M}(0,0) + n + m \geq 1 + n + m. \tag{1}$$

Indichiamo con $\mathbf{T}_0$ la tabella **buona** che ha in ogni casella il numero più piccolo possibile, cioè la tabella tale che, per ogni n e per ogni m, si ha:

$$\mathbf{T}_0(n,m) = 1 + n + m. \tag{2}$$

Vediamo $\mathbf{T}_0$ rappresentata nella figura 9:

6	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
5	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
4	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
3	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**

figura 9

Indichiamo con $\mathbf{D}$ la tabella che si ottiene come differenza tra $\mathbf{T}$ e $\mathbf{T}_0$, cioè tale che, per ogni n e per ogni m, si ha:

$$\mathbf{D}(n,m) = \mathbf{T}(n,m) - \mathbf{T}_0(n,m). \tag{3}$$

La tabella $\mathbf{M}$ è rappresentata nella figura 10:

0	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

figura 10

Osserviamo che ogni casella di $\mathbf{D}$ contiene solo 0 o 1 e che la linea che separa i due tipi di caselle ha la forma di una *"scala"*, come vediamo nella figura 11:

0	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

figura 11

Questo fatto in realtà è generale: dimostreremo che una tabella $\mathbf{T}$ è **buona** se e solo se $\mathbf{T} - \mathbf{T}_0$ è una tabella di soli 0 e 1 separata da una *"scala"*, del tipo di quella rappresentata nella figura 11.

Dimostrato questo avremo vinto: per contare quante sono le tabelle **buone** basterà contare quante sono le *"scale"*, che è un problema standard di combinatoria.
Per poter fare una dimostrazione corretta però dobbiamo prima definire in modo formale gli oggetti coinvolti.
A tale scopo segnaliamo innanzitutto che, per tutto il resto della discussione, la tabella $\mathbf{T}_0$ indicherà sempre quella definita da (2) e rappresentata nella figura 9.
Ricordiamo poi che una tabella $\mathbf{T}$ verrà detta **buona** se per ogni n e per ogni m si ha:

$$\mathbf{T}(n,m) \in \{1,\, 2,\, \ldots,\, 14\} \tag{4}$$
$$\mathbf{T}(n,m) < \mathbf{T}(n+1,m) \tag{5}$$
$$\mathbf{T}(n,m) < \mathbf{T}(n,m+1) \tag{6}$$

Invece una tabella $\mathbf{D}$ verrà detta **a scala** se per ogni n e per ogni m si ha:

$$\mathbf{D}(n,m) \in \{0,\, 1\} \tag{7}$$
$$\mathbf{D}(n,m) \leq \mathbf{D}(n+1,m) \tag{8}$$
$$\mathbf{D}(n,m) \leq \mathbf{D}(n,m+1) \tag{9}$$

Lo studente si convinca bene che le proprietà (8) e (9), cioè il fatto che, scorrendo ogni riga da sinistra a destra e ogni colonna dal basso verso l'alto, si incontrano prima gli zeri e poi gli uni, è proprio il modo formale per esprimere il fatto che la linea che separa la zona degli zeri da quella degli uni ha la forma di una scala, cioè è del tipo riportato in figura 11.
Poste queste notazioni, vogliamo ora dimostrare che, presa una tabella quasiasi $\mathbf{T}$ e indicata con $\mathbf{D}$ la tabella $\mathbf{T} - \mathbf{T}_0$, allora vale l'affermazione:

$$\mathbf{T} \text{ è } \textbf{buona} \iff \mathbf{D} \text{ è } \textbf{a scala}. \tag{10}$$

Dimostriamo prima $\boxed{\Leftarrow}$, che è più semplice.
Innanzitutto è ovvio che per ogni n, m sia $\mathbf{T}(n,m) \in \{1,\, 2,\, \ldots,\, 14\}$, visto che $\mathbf{T}(n,m) = \mathbf{T}_0(n,m) + \mathbf{D}(n,m)$ e che $\mathbf{T}_0(n,m) \in \{1,\, 2,\, \ldots,\, 13\}$ e $\mathbf{D}(n,m) \in \{0,\, 1\}$.
Questo dimostra che vale (4)
Per dimostrare (5) basta osservare che:

$$\mathbf{T}(n+1,m) - \mathbf{T}(n,m) = (\mathbf{T}_0(n+1,m) - \mathbf{T}_0(n,m)) + (\mathbf{D}(n+1,m) - \mathbf{D}(n,m)) \geq 1+0 = 1 > 0.$$

In modo del tutto analogo si dimostra (6).
Dimostriamo ora $\boxed{\Rightarrow}$.
Cominciamo stavolta dimostrando (8):

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(n+1,m) - \mathbf{D}(n,m) &= (\mathbf{T}(n+1,m) - \mathbf{T}(n,m)) - (\mathbf{T}_0(n+1,m) - \mathbf{T}_0(n,m)) = \\ &= (\mathbf{T}(n+1,m) - \mathbf{T}(n,m)) - 1 \geq \\ &\geq 1 - 1 = 0.\end{aligned}$$

In modo del tutto analogo si dimostra (9).
A questo punto, per dimostrare (7) basta osservare che:

$$\mathbf{D}(n,m) \geq \mathbf{D}(0,0) = \mathbf{T}(0,0) - \mathbf{T}_0(0,0) = \mathbf{T}(0,0) - 1 \geq 1 - 1 = 0$$

e che:

$$\mathbf{D}(n,m) \leq \mathbf{D}(7,5) = \mathbf{T}(7,5) - \mathbf{T}_0(7,5) = \mathbf{T}(7,5) - 13 \leq 14 - 13 = 1$$

Questo completa la dimostrazione dell'affermazione (10), grazie alla quale possiamo concludere che le tabelle **buone** sono tante quante quelle **a scala**.

Contare queste ultime ora `facile perché una *"scala"* è una sequenza di 8 segmenti orizzontali e 6 segmenti verticali messi in ordine opportuno e i diversi ordini sono $\binom{14}{6}$, cioè 3003.

[...]

Soluzione di 99. La risposta corretta è 2520.
La difficoltà di questo problema sta nel fatto che per passare dalla casella di partenza a quella di arrivo basterebbero 10 salti: 5 orizzontali verso destra e 5 verticali verso l'alto.
Ciò significa che i percorsi lunghi 12 salti non possono contenere solo spostamenti verso l'alto e verso destra.
Ad esempio il seguente percorso di 12 salti contiene anche uno spostamento verso il basso:

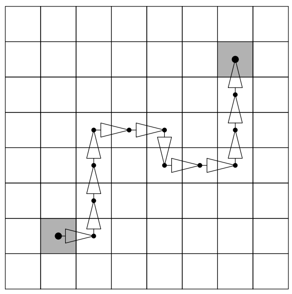

figura 12

Per maggior comodità fissiamo le seguenti notazioni:

$$\begin{array}{rl} \mathbf{A} & \text{significa}: \ \text{"}\textit{un passo verso l'alto}\text{"}, \\ \mathbf{B} & \text{significa}: \ \text{"}\textit{un passo verso il basso}\text{"}, \\ \mathbf{D} & \text{significa}: \ \text{"}\textit{un passo verso destra}\text{"}, \\ \mathbf{S} & \text{significa}: \ \text{"}\textit{un passo verso sinistra}\text{"}. \end{array}$$

Con tali notazioni il percorso di figura 12 è rappresentato dalla parola:

$$\mathbf{DAAADDBDDAAA}.$$

Osserviamo che i percorsi di 12 salti che dobbiamo contare possono essere (a meno di permutazioni dei salti) di 2 tipi:

$$(\mathbf{AAAAAA} + \mathbf{B}) + \mathbf{DDDDD} \tag{11}$$
$$(\mathbf{DDDDDD} + \mathbf{S}) + \mathbf{AAAAA} \tag{12}$$

Ad esempio quella di figura 12 rientra nella tipologia (11).
Bisogna però che i percorsi siano **buoni**, cioè che non ripassino mai per la stessa casella e che non escano dalla scacchiera. Inoltre poiché, per ovvi motivi di simmetria, i percorsi buoni di tipo (11) sono tanti quanti quelli di tipo (12), basterà contare quelli di uno dei due tipi.
Contiamo quelli di tipo (11).
Per prima cosa osserviamo che, in un percorso di tipo (11), comunque si permutino i salti, la posizione della pulce durante il percorso è sempre compresa tra quota -1 e quota $+6$ rispetto alla posizione di partenza e quindi non può mai uscire dalla scacchiera sforando in verticale.

Il fatto che invece non possa sforare in orizzontale è ovvio. Quindi tutti i percorsi di tipo (11), comunque siano permutati i salti, rimangono dentro la scacchiera.
Invece non tutti hanno la proprietà di non ripassare mai per lo stesso posto.
Ad esempio il percorso rappresentato dalla parola

DAADDABDDAAA

non è **buono** perché passa due volte per la casella **e4**, come vediamo nella figura seguente:

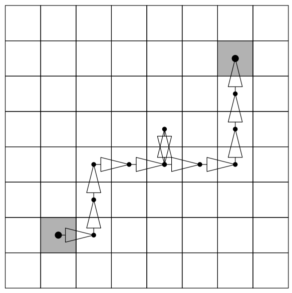

figura 13

Affermiamo che per i percorsi di 12 passi di tipo (11) vale l'equivalenza:

(13) **buono** $\Longleftrightarrow$ **B** ed **A** non sono mai vicine

Prima di dimostrare la (13), segnaliamo il fatto che la sua validità è strettamente legata al fatto che i passi siano esattamente 12. Infatti se, ad esempio, i passi fossero 14 potrebbero esserci sovrapposizioni anche senza che ci fossero **B** ed **A** (oppure **S** e **D**) vicine tra loro, come possiamo vedere nella figura seguente:

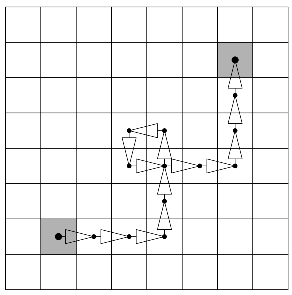

figura 14

dove vediamo il percorso rappresentato dalla parola

DDDAAASBDDDAAA.

Mostriamo dunque che vale (13).
La $\boxed{\Longrightarrow}$ è ovvia perché se nel percorso comparisse la sequenza **AB** (oppure **BA**) si ritornerebbe subito nella casella appena lasciata e quindi il percorso non potrebbe essere **buono**.
Per dimostrare che vale anche la $\boxed{\Longleftarrow}$ osserviamo che, non essendoci passi di tipo **S**, il tratto di percorso che viene prima di un passo di tipo **D** non può mai intersecare il tratto che viene dopo. Di conseguenza, se il percorso non è **buono**, il tratto che parte ed arriva

nella stessa casella non può contenere passi di tipo **D**, ma solo di tipo **A** e **B**, non tutti uguali. Ci saranno quindi almeno una **A** e una **B** vicine tra loro.
Per contare i percorsi **buoni** di tipo (11) basta dunque contare gli anagrammi di

AAAAAADDDDDB

in cui la **B** non è vicina ad alcuna **A**.
Essi sono di tre tipi:

(14)	quelli che cominciano con **BD**
(15)	quelli che terminano con **DB**
(16)	quelli che contengono la sequenza **DBD**

Sia quelli di tipo (14) che quelli di tipo (15) sono tanti quante le permutazioni delle rimanenti 4 lettere **D** e 6 lettere **A**, che sono:

$$\frac{10!}{6!\cdot 4!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=10\cdot 3\cdot 7=210.$$

Invece, per contare quelli di tipo (16), basta indicare con **X** la sequenza **DBD** e contare gli anagrammi di

AAAAAADDDX,

che sono

$$\frac{10!}{6!\cdot 3!\cdot 1!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 1}=10\cdot 3\cdot 4\cdot 7=840.$$

Quindi i percorsi **buoni** di tipo (11) sono $840+2\cdot 210$, cioè 1260.
Poiché, per motivi di simmetria, quelli di tipo (12) sono tanti quanti quelli di tipo (11), possiamo concludere che i percorsi buoni sono in tutto 2520.

[...]

`Soluzione di 101.` La risposta corretta è: 2402.
Per sviluppare la soluzione in modo più agevole introduciamo qualche notazione.

N. Data una sequenza $a_1, a_2, \ldots, a_n$ di numeri reali, presi k indici $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$, diremo che $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$ è una **catena strettamente crescente** di lunghezza k se e $a_{i_1} < a_{i_2} < \ldots < a_{i_k}$, mentre diremo che è una **catena strettamente decrescente** di lunghezza k se e $a_{i_1} > a_{i_2} > \ldots > a_{i_k}$.

Con tale notazione il nostro problema si può riformulare nel modo seguente:

> *qual è il minimo n tale che ogni permutazione di $\{1,2,\ldots,n\}$ ha almeno una catena (crescente o decrescente) lunga 50?*

Per mostrare che il minimo è $n = 49^2+1 = 2402$ dobbiamo far vedere due cose: la prima è che se $n = 2402$ allora una catena ordinata lunga 50 si trova sempre, la seconda è che quando invece n è più piccolo è sempre possibile esibire una permutazione che non ha catene lunghe 50.
Cominciamo dalla seconda che è più semplice.
Vogliamo mostrare che, più in generale, si può sempre esibire una permutazione di $\{1,2,\ldots,k^2\}$ che non ha catene ordinate lunghe $k+1$. Il caso del nostro problema si ottiene per $k = 49$.
Per meglio visualizzare quello che stiamo facendo, ragioniamo prima su un caso piccolo: $k = 3$.

In tal caso si trova che la permutazione

$$3,\ 2,\ 1,\ 6,\ 5,\ 4,\ 9,\ 8,\ 7$$

non ha alcuna catena ordinata lunga 4.
Per rendercene conto separiamola in 3 blocchi:

$$\overbrace{3,\ 2,\ 1,}^{1^o \text{ blocco}}\ \overbrace{6,\ 5,\ 4,}^{2^o \text{ blocco}}\ \overbrace{9,\ 8,\ 7}^{3^o \text{ blocco}}$$

Si noti che gli elementi di ciascun blocco sono in ordine decrescente. Di conseguenza ogni eventuale catena crescente non può avere due elementi nello stesso blocco e quindi gli elementi che la costituiscono non possono essere di più del numero dei blocchi. Ciò significa che la lunghezza di una catena crescente è al massimo 3.
Si noti anche che gli elementi di ciascun blocco sono maggiori di tutti gli elementi dei blocchi che lo precedono e minori di tutti quelli dei blocchi che lo seguono. Ciò significa che ogni eventuale catena decrescente deve essere contenuta tutta nello stesso blocco, e quindi la sua lunghezza è al massimo 3.
Se si è ben compreso il caso $k = 3$ non è difficile affrontare il caso generale.
Consideriamo dunque, già divisa in blocchi, la permutazione di $\{1, 2, \ldots, k^2\}$ avente nel primo blocco i numeri da 1 a k in ordine inverso, nel secondo quelli da $k + 1$ a $2k$, sempre in ordine inverso, e così via fino al $k-$esimo blocco, dove compaiono in ordine inverso gli ultimi k numeri:

$$\overbrace{k,\ k-1, \ldots,\ 2,\ 1,}^{1^o \text{ blocco}}\ \overbrace{2k,\ 2k-1, \ldots,\ k+1,}^{2^o \text{ blocco}}\ \ldots\ \overbrace{k^2,\ k^2-1, \ldots,\ k^2-k+1}^{k^o \text{ blocco}} \tag{17}$$

Anche qui, come prima, all'interno di ciascun blocco gli elementi sono in ordine decrescente e ciò forza ogni eventuale catena crescente ad avere lunghezza non maggiore del numero dei blocchi.
Inoltre, esattamente come prima, gli elementi di ciascun blocco sono maggiori di tutti gli elementi dei blocchi che lo precedono e minori di tutti quelli dei blocchi che lo seguono. Questo forza ogni eventuale catena decrescente ad essere tutta contenuta nello stesso blocco. Quindi ogni catena, crescente o decrescente che sia, è lunga al massimo k.
Abbiamo quindi mostrato che se $n = k^2$ è possibile esibire una permutazione di $\{1, 2, \ldots, n\}$ che non ha catene ordinate lunghe $k + 1$.
Questo è ovviamente vero anche se $n < k^2$, visto che basta prendere come permutazione di $\{1, 2, \ldots, n\}$ proprio la (17), ma eliminandone i numeri maggiori di n.
Nel caso particolare $k = 49$ otteniamo una delle 2 parti della soluzione del nostro problema: se $n \le 49^2$ allora esistono permutazioni di $\{1, 2, \ldots, n\}$ che non hanno catene lunghe 50.
Rimane da mostrare che se invece $n = 49^2 + 1$ allora una catena lunga 50 si trova sempre.
Anche stavolta il caso generale richiede la stessa fatica del caso particolare; mostriamo quindi che, in generale, se $n = k^2+1$ allora ogni permutazione di $\{1, 2, \ldots, n\}$ ha almeno una catena lunga $k + 1$.
A tale scopo, per ogni $i = 1, \ldots, n$, definiamo ℓ_i come la massima lunghezza di una catena crescente che ha a_i come primo elemento.
A queato punto, se per un qualche indice i si ha $\ell_i \ge k + 1$ allora abbiamo vinto: infatti in tal caso c'è una catena crescente lunga almeno $k + 1$ che parte da a_i.
Se invece così non è, allora i valori possibili per gli ℓ_i sono solo k visto che per ogni i si ha $1 \le \ell_i \le k$.
Di conseguenza, visto che gli ℓ_i sono più di k^2, ci saranno almeno $k + 1$ indici $i_1 < i_2 < \ldots < i_k < i_{k+1}$, tali che $\ell_{i_1} = \ell_{i_2} = \ldots = \ell_{i_k} = \ell_{i_{k+1}}$.
Mostriamo che prendendo tutti gli a_i che hanno esattamente quegli indici si ottiene una catena decrescente lunga $k + 1$, cioè:

$$a_{i_1} > a_{i_2} > \ldots > a_{i_k} > a_{i_{k+1}}. \tag{18}$$

Infatti, se così non fosse, esisterebbero due indici i e j tali che:

$$i < j \tag{19}$$

$$a_i < a_j \tag{20}$$

$$\ell_i = \ell_j \tag{21}$$

Ma allora aggiungendo a_i alla catena crescente lunga ℓ_j che parte da a_j, otterremmo una catena lunga $\ell_j + 1$ che parte da a_i. Da ciò seguirebbe che $\ell_i \geq \ell_j + 1$, contraddicendo (21).
Quindi la (18) vale e, di conseguenza, abbiamo trovato una catena decrescente lunga $k + 1$.
Riassumendo: se non ci sono catene crescenti lunghe $k + 1$ allora ce n'è almeno una decrescente lunga $k + 1$, quindi una catena ordinata lunga $k + 1$ c'è sempre.
Per $k = 49$ questo è esattamente ciò che serve per completare la soluzione del nostro problema.