Stage Urbi et Orbi - Lez. 4B

Titolo nota

13 dicembre 2019 (14.30-17.30) - docente: Prof. **Roberto Tauraso** - Università di Roma ***Tor Vergata***

www.problemisvolti.it

TECNICHE VARIE DI COMBINATORIA

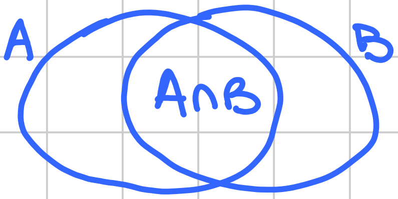
NOTAZIONE: SE A È UN INSIEME FINITO INDICHIAMO CON $|A|$ IL NUMERO DEI SUOI ELEMENTI.

PRINCIPIO DI INCLUSIONE-ESCLUSIONE

SE A E B SONO INSIEMI FINITI ALLORA

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

LA FORMULA SI VERIFICA FACILMENTE:



SE UN ELEMENTO $x \in A \cup B$ ALLORA ABBIAMO TRE CASI DISTINTI:

1) SE $x \in A$ MA $x \notin A \cap B$ ALLORA x VIENE CONTATO 1 VOLTA DA $|A|$.
2) SE $x \in B$ MA $x \notin A \cap B$ ALLORA x VIENE CONTATO 1 VOLTA DA $|B|$.
3) SE $x \in A \cap B$ ALLORA x VIENE CONTATO 1 VOLTA DA $|A|$, 1 VOLTA DA $|B|$ E -1 VOLTA DA $-|A \cap B|$. TOTALE $1+1-1=1$.

QUINDI LA FORMULA CONTA UNA E UNA SOLA VOLTA OGNI ELEMENTO DI $A \cup B$.

LA FORMULA SI PUÒ ESTENDERE A TRE INSIEMI. SE A, B E C SONO INSIEMI FINITI ALLORA

$$
\begin{aligned}
|A\cup B\cup C| &= |(A\cup B)\cup C| = |A\cup B| + |C| - |(A\cup B)\cap C| \\
&= |A| + |B| - |A\cap B| + |C| - |(A\cap C)\cup(B\cap C)| \\
&= |A| + |B| + |C| - |A\cap B| \\
&\quad - \left(|A\cap C| + |B\cap C| - |A\cap B\cap C|\right)
\end{aligned}
$$

DOVE ABBIAMO APPLICATO LA FORMULA PER DUE INSIEMI TRE VOLTE. QUINDI

$$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C| - \left(|A\cap B|+|B\cap C|+|C\cap A|\right) + |A\cap B\cap C|$$

IN GENERALE SE $A_1, A_2, \dots, A_n$ SONO INSIEMI FINITI ALLORA

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i\cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i\cap A_j\cap A_k| - \dots + (-1)^{n-1} |A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n|$$

VEDIAMO QUALCHE APPLICAZIONE DEL PRINCIPIO DI INCLUSIONE-ESCLUSIONE (P.I.E.)

PROBLEMA 1

QUANTI SONO GLI INTERI NELL'INTERVALLO $[1,100]$ CHE SONO MULTIPLI DI 4 OPPURE MULTIPLI DI 5 OPPURE MULTIPLI DI 6?

SIA S_n L'INSIEME DEGLI INTERI IN $[1,100]$

CHE SONO MULTIPLI DI m. ALLORA

$$|S_m| = \left\lfloor \frac{100}{m} \right\rfloor$$

DOVE $\lfloor \cdot \rfloor$ INDICA LA PARTE INTERA.
DOBBIAMO DETERMINARE $|S_4 \cup S_5 \cup S_6|$ E PER P.I.E. BASTA CALCOLARE

$$|S_4| + |S_5| + |S_6| - \left(|\underbrace{S_4 \cap S_5}_{S_{20}}| + |\underbrace{S_5 \cap S_6}_{S_{30}}| + |\underbrace{S_4 \cap S_6}_{S_{12}}| \right)$$

$$+ |\underbrace{S_4 \cap S_5 \cap S_6}_{S_{60}}|$$

OSS. $S_a \cap S_b = S_{mcm(a,b)}$

$$= \left\lfloor \frac{100}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor - \left(\left\lfloor \frac{100}{20} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{30} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{12} \right\rfloor \right) + \left\lfloor \frac{100}{60} \right\rfloor$$

$$= 25 + 20 + 16 - (5 + 3 + 8) + 1 = \boxed{46}$$

PROBLEMA 2

CONTARE IL NUMERO DI ANAGRAMMI DELLA PAROLA "FARFALLE" CHE NON CONTENGONO LETTERE UGUALI VICINE.

LA PAROLA DATA CONTIENE TRE COPPIE: FF, AA, LL.
INDICHIAMO CON S_F L'INSIEME DEGLI ANAGRAMMI CON DUE F VICINE. ANALOGAMENTE DEFINIAMO S_A E S_L. DOBBIAMO SOTTRARRE AL NUMERO TOTALE DI ANAGRAMMI SENZA RESTRIZIONI IL NUMERO $|S_F \cup S_A \cup S_L|$. PER P.I.E.

$$\frac{8!}{2!2!2!} - \left(|S_F|+|S_A|+|S_L|\right) + \left(|S_F \cap S_A| + |S_F \cap S_L| + |S_A \cap S_L|\right) - |S_F \cap S_A \cap S_L|$$

ORA

$$|S_F| = |S_A| = |S_L| = \frac{7!}{2!\,2!}$$

DOVE ABBIAMO CONSIDERATO LA DOPPIA ASSEGNATA COME UN'UNICA LETTERA.

IN MODO SIMILE

$$|S_F \cap S_A| = |S_F \cap S_L| = |S_A \cap S_L| = \frac{6!}{2}$$

E

$$|S_F \cap S_A \cap S_L| = 5!$$

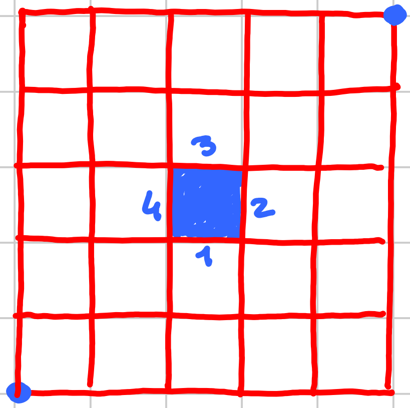
QUINDI LA RISPOSTA È

$$\frac{8!}{8} - 3 \cdot \frac{7!}{4} + 3 \cdot \frac{6!}{2} - 5! = 7!\left(1-\frac{3}{4}\right) + 5!\,(9-1)$$

$$= \left(\frac{21}{2}+8\right) \cdot 120 = 37 \cdot 60 = \boxed{2220}$$

PROBLEMA 3

CONTARE IL NUMERO DI PERCORSI NEL QUADRATO 5×5 CHE PARTONO DAL VERTICE IN BASSO A SINISTRA E CHE ARRIVANO NEL VERTICE IN ALTO A DESTRA CON MOVIMENTI VERSO DESTRA O VERSO L'ALTO CON ALMENO UN TRATTO LUNGO LA CASELLA CENTRALE?



INDICHIAMO CON P_i L'INSIEME DEI PERCORSI CON UN TRATTO LUNGO IL LATO i CON $i=1,2,3,4$.
DOBBIAMO DETERMINARE

$$|P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4|$$

NOTIAMO CHE SE UN PERCORSO PASSA LUNGO IL LATO 1 O 2 NON PUÒ PASSARE LUNGO IL LATO 3 O 4 E VICEVERSA. QUINDI $P_1 \cup P_2$ È DISGIUNTO DA $P_3 \cup P_4$ E PER P.I.E.

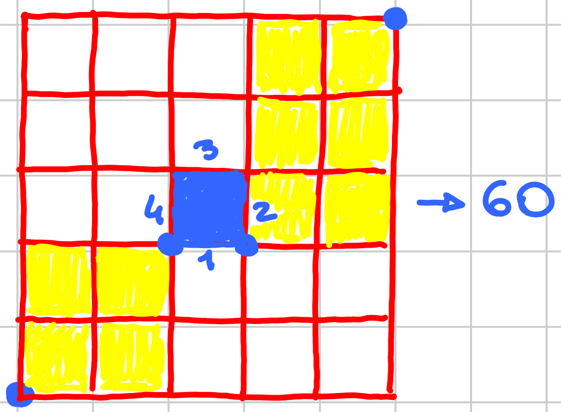
$$\begin{aligned}|P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4| &= |P_1 \cup P_2| + |P_3 \cup P_4| \\ &= |P_1| + |P_2| - |P_1 \cap P_2| \\ &\quad + |P_3| + |P_4| - |P_3 \cap P_4| \\ &= 4 \cdot 60 - 2 \cdot 36 = 240 - 72 = \boxed{168}\end{aligned}$$

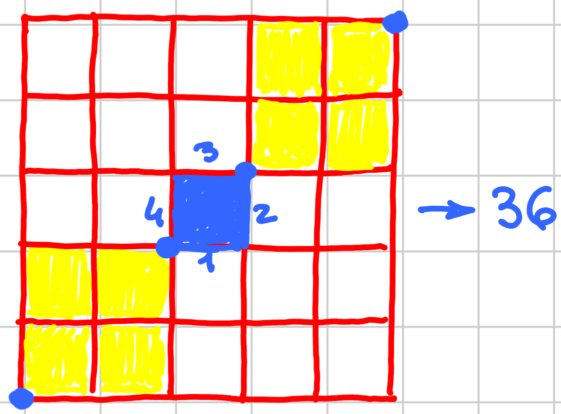
PERCHÉ

$$|P_1| = |P_2| = |P_3| = |P_4| = \binom{2+2}{2} \cdot \binom{3+2}{2} = 60$$

E

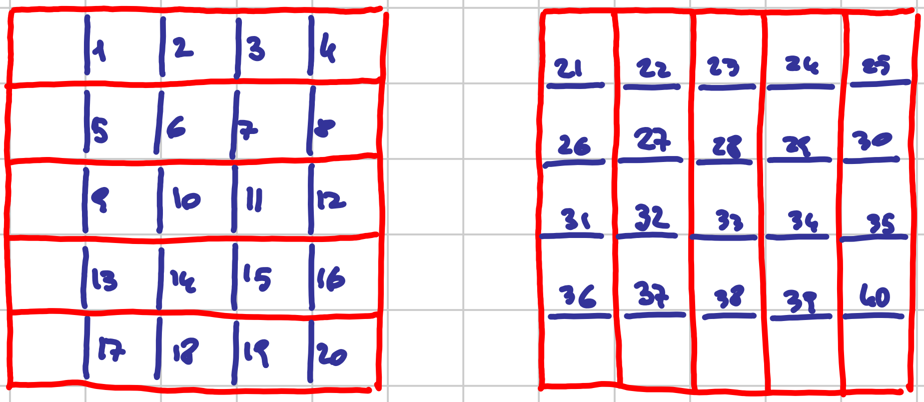
$$|P_1 \cap P_2| = |P_3 \cap P_4| = \binom{2+2}{2} \cdot \binom{2+2}{2} = 36$$





PROBLEMA 4

IN QUANTI MODI SI POSSONO SCEGLIERE 3 CASELLE IN UNA TABELLA 5x5 IN MODO CHE LE CASELLE NON ABBIANO NESSUN LATO IN COMUNE?



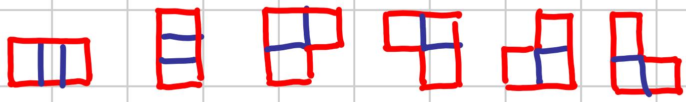
NOTIAMO CHE I POSSIBILI LATI IN COMUNE SONO 5 SU OGNUNA DELLE 4+4 LINEE INTERNE OSSIA 40. QUINDI DOBBIAMO SOTTRARRE AL TOTALE DEI MODI DI SCEGLIERE 3 CASELLE, OSSIA $\binom{25}{3}$, LA CARDINALITÀ DELL'INSIEME $\left|\bigcup_{i=1}^{40} A_i\right|$ DOVE A_i È IL NUMERO DI TERNE DI CASELLE DI CUI DUE HANNO IN COMUNE IL LATO i. PER P.I.E.

$$\binom{25}{3} - \left|\bigcup_{i=1}^{40} A_i\right| = \binom{25}{3} - \left(\sum_{1\le i\le 40} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le 40} |A_i \cap A_j|\right)$$

DOVE LE INTERSEZIONI DI ALMENO TRE A_i DISTINTI È VUOTA PERCHÉ TRE CASELLE POSSONO AVERE AL PIÙ DUE LATI IN COMUNE.

ABBIAMO CHE $|A_i| = 25-2$ (OSSIA IL NUMERO DI MODI DI SCEGLIERE LA TERZA CASELLA). INOLTRE

$$|A_i \cap A_j| = \begin{cases} 1 & \text{SE I DUE LATI } i \text{ E } j \text{ SONO} \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$



LE COPPIE DI LATI || SONO $5 \cdot 3 = 15$.
ANCHE LE COPPIE DI LATI = SONO 15.
LE COPPIE DI LATI ┘ SONO $4 \cdot 4 = 16$.
LO STESSO PER └, ┌, ┐.
POSSIAMO CONCLUDERE CHE LA RISPOSTA È

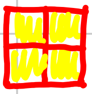
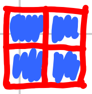
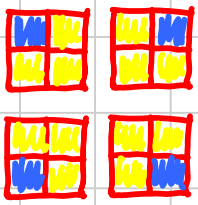
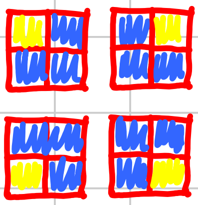
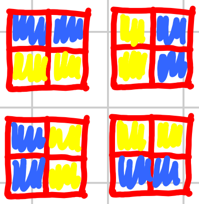
$$\binom{25}{3} - 40(25-2) + 2 \cdot 15 + 4 \cdot 16$$

$$= \frac{25 \cdot \overset{4}{\cancel{24}} \cdot 23}{\cancel{6}} - 1000 + 80 + 30 + 64$$

$$= 2300 - 1000 + 174 = \boxed{1474}$$

LEMMA DI BURNSIDE

LE 4 CASELLE DI UNA TABELLA QUADRATA 2x2 VENGONO COLORATE DI GIALLO O DI BLU.
È CHIARO CHE POTENDO COLORARE CIASCUNA CASELLA CON UNO DEI DUE COLORI DATI LE COLORAZIONI DIVERSE SONO $2^4 = 16$.
SE PERÒ AMMETTIAMO CHE LA TABELLA POSSA ESSERE RUOTATA ALLORA IL NUMERO DI COLORAZIONI DIVERSE DIMINUISCE A 6.
TALI COLORAZIONI SONO RAGGRUPPATE NELLA PRIMA RIGA DELLA SEGUENTE TABELLA

						
R_0	1	1	4	4	4	2
R_{90}	1	1	0	0	0	0
R_{-90}	1	1	0	0	0	0
R_{180}	1	1	0	0	0	2

NELLE ALTRE RIGHE SONO RIPORTATI I NUMERI DELLE COLORAZIONI "INVARIANTI" SE RUOTATE DI 0, 90, −90, 180 GRADI. NOTIAMO CHE LE COLONNE NON SONO TUTTE UGUALI MA IL TOTALE DEI NUMERI IN CIASCUNA COLONNA È SEMPRE 4 OSSIA IL NUMERO DI ROTAZIONI.

QUINDI PER OTTENERE IL NUMERO DI DIVERSE COLORAZIONI A MENO DI ROTAZIONI BASTA SOMMARE I NUMERI IN CIASCUNA RIGA E DIVIDERE PER 4:

$$\frac{(1+1+4+4+4+2)+(1+1)+(1+1)+(1+1+2)}{4}$$

$$= \frac{16+2+2+4}{4} = \frac{24}{4} = 6.$$

QUESTE OSSERVAZIONI VALGONO PIÙ IN GENERALE E CON UN RAGIONAMENTO SIMILE SI PUÒ DIMOSTRARE IL LEMMA DI BURNSIDE:

SIA X UN INSIEME FINITO E G UN GRUPPO DI SIMMETRIE DI X. DUE ELEMENTI x_1 E x_2 DI X SONO EQUIVALENTI SE C'È UN g IN G PER CUI $g(x_1)=x_2$. ALLORA IL NUMERO DI ELEMENTI NON EQUIVALENTI DI X È

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} |inv(g)|$$

DOVE $inv(g)$ È L'INSIEME DEGLI x IN X CHE SONO INVARIANTI PER g OSSIA $g(x)=x$.

NELL'ESEMPIO CONSIDERATO X È L'INSIEME DELLE 16 TABELLE COLORATE E G È IL GRUPPO DELLE 4 ROTAZIONI $R_0, R_{90}, R_{-90}, R_{180}$.

COSA SUCCEDE SE INVECE DI 2 COLORI NE USIAMO m? QUANTE SONO LE COLORAZIONI A MENO DI ROTAZIONI?

$$\frac{1}{4}\Big(\underbrace{|inv(R_0)|}_{=m^4}+\underbrace{|inv(R_{90})|}_{=m}+\underbrace{|inv(R_{-90})|}_{=m}+\underbrace{|inv(R_{180})|}_{=m^2}\Big)$$

$$=\frac{m^4+2m+m^2}{4} \longrightarrow 1, 6, 24, 70, 165, \dots$$

QUANTE SONO LE COLORAZIONI CON ESATTAMENTE m COLORI?

$m=1 \Rightarrow 1$

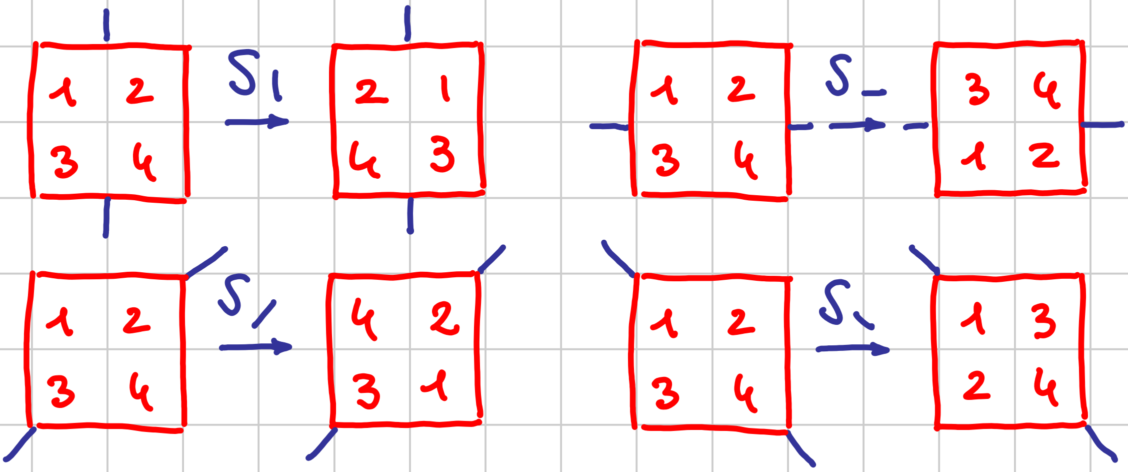
$m=2 \Rightarrow 6-2\cdot 1=4$ (PER P.I.E)

$m=3 \Rightarrow 24-\binom{3}{1}6+\binom{3}{2}\cdot 1=9$ (PER P.I.E.)

$m=4 \Rightarrow \frac{4!}{4}=6$ (PER BURNSIDE)

$m\geq 5 \Rightarrow 0$ (CI SONO SOLO 4 CASELLE!)

QUANTE SONO LE COLORAZIONI SE SI AMMETTONO ANCHE LE 4 RIFLESSIONI: $S_|, S_-, S_/, S_\backslash$?



IN QUESTO CASO IL GRUPPO DI SIMMETRIE HA $4+4=8$ ELEMENTI E PER IL LEMMA DI BURNSIDE SEGUE CHE LE COLORAZIONI DIVERSE SONO

$$\frac{1}{8}\Big(n^4+2n+n^2+\underbrace{|inv(S_|)|}_{=n^2}+\underbrace{|inv(S_-)|}_{=n^2}+\underbrace{|inv(S_/)|}_{=n^3}+\underbrace{|inv(S_\backslash)|}_{=n^3}\Big)$$

$$=\frac{1}{8}\left(n^4+2n+n^2+n^2+n^2+n^3+n^3\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(n^4+2n^3+3n^2+2n\right) \longrightarrow 1, 6, 21, 55, 120, \ldots$$

TALI NUMERI SONO OVVIAMENTE $\leq$ DI QUELLI OTTENUTI USANDO SOLO LE ROTAZIONI.

PROBLEMA 5

IN QUANTI MODI POSSIAMO COLORARE UNA TABELLA QUADRATA 3x3 CON AL PIÙ n COLORI A MENO DI ROTAZIONI E RIFLESSIONI? QUANTI SONO I MODI PER UNA TABELLA 4x4?

1	2	3
4	5	6
7	8	9

CALCOLIAMO IL NUMERO DI COLORAZIONI INVARIANTI PER CIASCUNA SIMMETRIA.

$$|inv(R_0)| = n^9$$

$$|inv(R_{90})| = |inv(R_{-90})| = n^3$$

SCEGLO I COLORI PER LE CASELLE 1, 2, 5

$$|inv(R_{180})| = n^5$$

SCEGLO I COLORI PER LE CASELLE 1, 2, 3, 5, 6

$$|inv(S_|)| = |inv(S_-)| = n^6$$

SCEGLO I COLORI PER LE CASELLE 1, 2, 4, 5, 7, 8

SCEGLO I COLORI PER LE CASELLE 1, 2, 3, 4, 5, 6

$$|inv(S_{/})| = |inv(S_{\backslash})| = n^6$$

SCELGO I COLORI PER LE CASELLE 1,2,3,4,5,7

SCELGO I COLORI PER LE CASELLE 1,2,3,5,6,9

COSÌ PER BURNSIDE IL NUMERO DI COLORAZIONI DIVERSE È

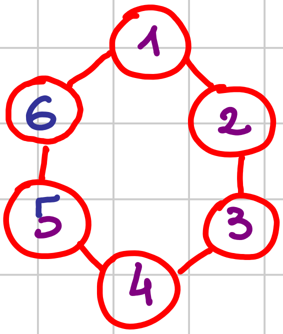
$$\frac{1}{8}\left(n^9+2n^3+n^5+2n^6+2n^6\right) \rightarrow 1,\ 102,\ 2862, \dots$$

PER LA TABELLA 4x4 SI RAGIONA IN MODO SIMILE E SI TROVA CHE IL NUMERO DI COLORAZIONI È

$$\frac{1}{8}\left(n^{16}+2n^4+n^8+2n^8+2n^{10}\right) \rightarrow 1,\ 8548, \dots$$

PROBLEMA 6

QUANTI BRACCIALETTI DIVERSI SI POSSONO FARE CON 6 PERLINE DI n COLORI?



IL GRUPPO DI SIMMETRIE È COSTITUITO DA 12 ELEMENTI.

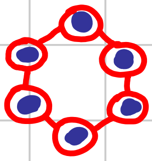
6 ROTAZIONI: $R_0, R_{60}, R_{120}, R_{-60}, R_{-120}, R_{180}$

6 RIFLESSIONI: $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$

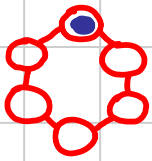
DOVE S_1, S_2, S_3 SONO LE RIFLESSIONI RISPETTO A CIASCUNA DIAGONALE E S_4, S_5, S_6 LE RIFLESSIONI RISPETTO AGLI ASSI DEI LATI OPPOSTI.

CALCOLIAMO IL NUMERO DI COLORAZIONI INVARIANTI PER CIASCUNA SIMMETRIA.

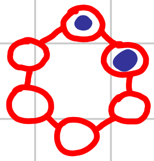
$|inv(R_0)| = n^6$



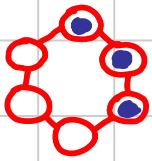
$|inv(R_{60})| = |inv(R_{-60})| = n^1$



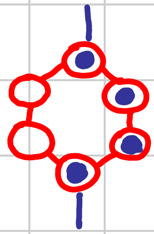
$|inv(R_{120})| = |inv(R_{-120})| = n^2$



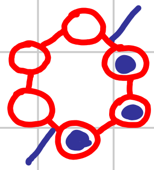
$|inv(R_{180})| = n^3$



$|inv(S_i)| = n^4$ PER $i = 1, 2, 3$



$|inv(S_i)| = n^3$ PER $i = 4, 5, 6$



COSÌ PER BURNSIDE IL NUMERO DI COLORAZIONI DIVERSE È

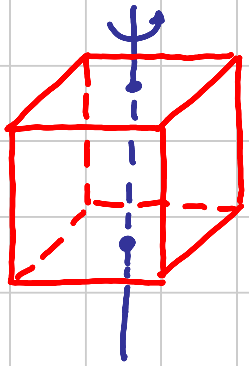
$$\frac{1}{12}\left(n^6 + 2n + 2n^2 + n^3 + 3n^4 + 3n^3\right) \longrightarrow 1, 13, 92, 430, \ldots$$

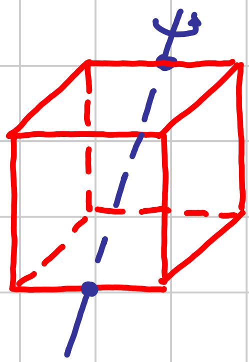
PER CONCLUDERE PRESENTIAMO UN'APPLICAZIONE "TRIDIMENSIONALE" DEL LEMMA DI BURNSIDE.

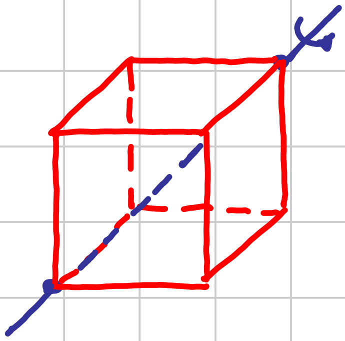
PROBLEMA 7

IN QUANTI MODI SI POSSONO COLORARE LE 6 FACCE DI UN CUBO CON ESATTAMENTE 6 COLORI? E CON (AL PIÙ) n COLORI?

IL GRUPPO DI SIMMETRIE DI UN CUBO È COSTITUITO DA: L'IDENTITÀ E LE ROTAZIONI







3 ASSI LUNGO I CENTRI DI 2 FACCE OPPOSTE. ANGOLI: $90°, -90°, 180°$

6 ASSI LUNGO I CENTRI DI 2 SPIGOLI OPPOSTI. ANGOLO: $180°$

4 ASSI LUNGO 2 VERTICI OPPOSTI. ANGOLI: $120°, -120°$

IN TOTALE IL NUMERO DI SIMMETRIE È

$$1+3\cdot 3+6+4\cdot 2 = 24.$$

SE UN CUBO HA LE 6 FACCE DI COLORE DIVERSO ALLORA A PARTE L'IDENTITÀ NESSUNA DELLE COLORAZIONI È INVARIANTE. QUINDI PER IL LEMMA DI BURNSIDE OTTENIAMO

$$\frac{6!}{24} = \boxed{30}$$

PER m COLORI LE COLORAZIONI DELLE FACCE DEL CUBO INVARIANTI PER CIASCUNA SIMMETRIE SONO:

$$|\text{inv}(\text{IDENTITÀ})| = m^6$$

$$\left|\text{inv}\begin{pmatrix}R_{\pm 90} \text{ ATTORNO AD ASSE LUNGO} \\ \text{I CENTRI DI DUE FACCE OPPOSTE}\end{pmatrix}\right| = m^3$$

$$\left|\text{inv}\begin{pmatrix}R_{180} \text{ ATTORNO AD ASSE LUNGO} \\ \text{I CENTRI DI DUE FACCE OPPOSTE}\end{pmatrix}\right| = m^4$$

$$\left|\text{inv}\begin{pmatrix}R_{180} \text{ ATTORNO AD ASSE LUNGO} \\ \text{I CENTRI DI DUE SPIGOLI OPPOSTI}\end{pmatrix}\right| = m^3$$

$$\left|\text{inv}\begin{pmatrix}R_{\pm 120} \text{ ATTORNO AD ASSE LUNGO} \\ \text{DUE VERTICI OPPOSTI}\end{pmatrix}\right| = m^2$$

COSÌ PER IL LEMMA DI BURNSIDE POSSIAMO CONCLUDERE CHE IL NUMERO DI COLORAZIONI DIVERSE DELLE 6 FACCE DEL CUBO CON m COLORI È

$$\frac{1}{24}\left(m^6 + 6m^3 + 3m^4 + 6m^3 + 8m^2\right)$$

$$= \boxed{\frac{1}{24}\left(m^6 + 3m^4 + 12m^3 + 8m^2\right)} \rightarrow 1, 10, 57, 240, \ldots$$