Velletri, 5 Dicembre 2016

Olimpiadi Della Matematica

stage di preparazione - gara a tema: **Aritmetica**

Nota per l'insegnante. Questa gara è pensata essenzialmente per uso didattico: nella lezione che seguirà la gara, prendendo spunto dai problemi proposti, cercherò di introdurre le principali idee di aritmetica elementare. Per questo motivo ho suddiviso i problemi in 4 gruppi: i problemi su **fattorizzazioni e divisori** per introdurre le nozioni standard (numero, prodotto e somma dei divisori, MCD, mcm, ecc.); i problemi sulle **equazioni diofantee lineari**; i problemi sulle **congruenze**; i **problemi di approfondimento** per mettersi alla prova con problemi non standard.
Come sempre, nella lezione che seguirà la gara, cercherò di adattare il livello della spiegazione in modo che sia comprensibile a tutti. Se necessario, eliminerò i problemi più difficili.

Emanuele Callegari

Fattorizzazione e Divisori

1. Trovare il MCD $(100010, 99970)$.

2. Qual è il più grande numero primo che divide 66711?

3. Quanti sono i diversi rettangoli aventi i lati la cui misura, espressa in centimetri, è intera e l'area di 324000cm^2? (N.B. due rettangoli vanno considerati uguali, e quindi contati una volta sola, se hanno gli stessi lati, senza tener conto di quale sia la base e quale l'altezza)

4. Siano $n = 22.222.222$ e $m = 22.228.888$. Quanti numeri interi positivi dividono sia m che n?

5. Qual è il più grande numero intero positivo n tale che n^2 divide $123.246.124^2 - 123.246.122^2$?

6. Dire quanti sono i numeri interi n, con $1 \leq n \leq 10^8$, che sono dei quadrati perfetti ma tali che né la loro radice cubica né la loro radice quarta sono intere.

7. In quanti modi 2009 può essere scritto come differenza di quadrati?

8. La popolazione di Passo Corese era un tempo un numero che era un quadrato perfetto, l'anno dopo con l'aggiunta di 100 persone è un numero che è un altro quadrato più 1, e l'anno successivo con l'ulteriore aggiunta di 100 è di nuovo un quadrato. Quanto era la popolazione iniziale?

9. Sia S la somma di tutti i divisori di 30^{11} (contando anche 1 e il numero stesso) e sia K il numero di divisori di S. Quanto vale $\dfrac{K}{10}$?

10. Trovare, se esiste, n intero positivo in modo che $\text{MCD}(n, 1000) = 40$ e $\text{mcm}(n, 1000) = 144000$. Se non esiste indicare come risposta 0. Se invece ne esistesse più di uno, indicare come risposta 9999.

11. Si immagini di scrivere, listati in ordine crescente, tutti i divisori di $n = 8782^2 - 18^2$, compresi 1 e n. Qual è il 96−esimo divisore scritto sulla lista?

12. Del numero intero positivo n sappiamo che ha 144 divisori. Quanti ne ha, al massimo, il suo quadrato?

Equazioni Diofantee Lineari

13. Una bilancia a piatti, ha i due piatti A e B che non stanno bene in equilibrio: il piatto A pesa 1 grammo in più del piatto B. Inoltre disponiamo solo di pesetti da 87 grammi e da 35 grammi, in quantità illimitata. Qual è il minimo numero di pesetti che dobbiamo mettere complessivamente sui due piatti della bilancia se vogliamo fare in modo che stiano in equilibrio? Nel caso non sia possibile farlo dare come risposta 0.

14. Come il problema **13**, ma disponendo di pesetti da 78 e da 33 grammi invece che da 87 e 35.

15. Come il problema **13**, ma con i piatti che differiscono di 23 grammi invece che di 1 grammo.

16. Sia $p(x)$ il polinomio che si ottiene sviluppando $\left(1 + x^{64} + x^{83}\right)^{1000}$ e poi sommando tra loro i termini simili. Qual è il più grande n intero positivo che non supera 10000 e tale che in $p(x)$ non c'è il termine di grado n?

Congruenze

17. Qual è il più piccolo intero positivo n tale che $601n + 17$ è un multiplo di 2016.

18. Una nota canzone dell'isola *Kenoncè*, anziché raccontare (come nel resto del mondo) di 44 gatti in fila per 6 col resto di 2, racconta di n gatti (con $8000 < n < 9500$) che in fila per 7 danno il resto di 5 mentre in fila per 11 e per 13 danno sempre il resto di 0. Quanto vale n? Se tale n non esiste dare come risposta 0 mentre se non fosse univocamente determinato dare come risposta 9999.

19. Sia $n = 15328471582$, che resto si ottiene dividendo n^{10} per 495?

Problemi di Approfondimento

20. Determinare il più piccolo intero positivo n tale che $n!$ termina esattamente con 1000 zeri. (se non esiste indicare come risposta 9999).

21. Sul pianeta Tondo, l'anno è composto da 10.000 giorni, numerati da 1 a 10.000. Su tale pianeta vivono tre fratellini: Claudia, Luca e Marco. Claudia dice la verità solo nei giorni dell'anno che sono multipli di 36, mentre è bugiarda in tutti gli altri giorni. In modo del tutto analogo Luca dice la verità solo nei giorni che sono multipli di 19 e Marco dice la verità solo nei giorni pari.
Si consideri il seguente dialogo:

Claudia: - Domani sarò una bugiarda.
Luca: - Domani sarò un bugiardo.
Marco: - Almeno uno di voi due sta mentendo.

Qual è il primo giorno dell'anno in cui tale dialogo si può svolgere? (indicare 0 se si ritiene che tale dialogo non si possa svolgere in alcun giorno)

22. Quante sono le terne di numeri interi non negativi (x, y, z) che soddisfano l'equazione $x^3 + 2y^3 + 4z^3 = 8xyz$ e tali che $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2010^2$.

Risposte dei Problemi

Problema 1	:	10
Problema 2	:	601
Problema 3	:	60
Problema 4	:	8
Problema 5	:	2002
Problema 6	:	9883
Problema 7	:	3
Problema 8	:	2401
Problema 9	:	1152
Problema 10	:	5760
Problema 11	:	8764
Problema 12	:	2025
Problema 13	:	7
Problema 14	:	0
Problema 15	:	39
Problema 16	:	5165
Problema 17	:	1543
Problema 18	:	8580
Problema 19	:	199
Problema 20	:	4005
Problema 21	:	360
Problema 22	:	1