

Velletri, 19 Dicembre 2016

Olimpiadi Della Matematica

stage di preparazione - gara a tema: Geometria

Nota per l'insegnante. In questa seconda gara ho suddiviso i problemi tra 2 argomenti: **geometria piana** e **geometria solida**. In ciascuno dei due raggruppamenti i problemi sono (circa) in ordine di difficoltà. Tutti i problemi si possono risolvere usando solo le nozioni apprese al biennio e alla scuola media, anche se necessitano di una buona dose di creatività. In particolare si possono sempre risolvere senza ricorrere alla trigonometria. In alcuni (non molti) problemi sono coinvolte circonferenze, ma questo non deve scoraggiare i ragazzi di classe prima: spesso le proprietà che servono sono già note dalla scuola media. Infine chiedo agli insegnanti di esortare i ragazzi a cimentarsi anche con i problemi di geometria solida: non serve alcun teorema particolare ma solo un po' di abilità a visualizzare le cose in 3D.

Emanuele Callegari

Geometria Piana

1. Le diagonali del quadrilatero convesso $ABCD$ si intersecano nel punto P . Sapendo che i triangoli APB , BPC e CPD hanno aree rispettivamente 100, 200 e 400 calcolare l'area complessiva del quadrilatero $ABCD$.
2. Le diagonali del quadrilatero convesso $ABCD$ si intersecano nel punto P . Dire quanto vale, in gradi, la somma dei suoi angoli interni \hat{A} e \hat{B} , sapendo che i triangoli APB , BPC e CPD hanno aree rispettivamente 150, 600 e 150. Se si ritiene che i dati non siano sufficienti a rispondere, dare come risposta 0.
3. L'area di un esagono regolare è di 5460cm^2 . Trovare l'area (espressa in cm^2) dell'insieme \mathcal{S} costituito da tutti e soli i punti P interni all'esagono con la seguente proprietà: *qualsiasi lato dell'esagono si prenda, la proiezione di P sulla retta su cui giace il lato, appartiene al lato*.
4. Nel quadrato $ABCD$ siano P , Q , R e S i punti medi, rispettivamente, dei lati AB , BC , CD e DA . Tracciando i segmenti AR , CP , BS e DQ il quadrato rimane diviso in 9 parti, delle quali, quella con area massima ha area 288cm^2 . Quanto vale (in cm^2) l'area di $ABCD$?
5. Quanti sono i diversi rettangoli aventi il perimetro di 201cm e l'area che, espressa in cm^2 , è un numero intero di 4 cifre?
6. È dato un triangolo equilatero ABC col lato di 2014cm e un cerchio Γ centrato in A con l'area di 11340cm^2 . Qual è (espressa in cm^2) l'area del cerchio più grande contenuto sia in Γ che in ABC .
7. Dato un dodecagono regolare di vertici $P_1P_2P_3 \dots P_{12}$, si consideri il quadrato ottenuto congiungendo i vertici $P_1P_4P_7P_{10}$. Sapendo che l'area complessiva della parte di piano contenuta nel dodecagono ma esterna al quadrato è 2014cm^2 , dire quanto vale in cm^2 l'area del quadrato.
8. Nel triangolo acutangolo ABC si prendano un punto P sul lato AC ed un punto Q sul lato BC in modo tale che AQ e BP siano tra loro perpendicolari e indichiamo con R il punto loro intersezione. Se le aree dei triangoli ARP , ABR e BQR sono rispettivamente 11, 12 e 13, quanto vale l'area del triangolo ABC ?
9. L'ottagono convesso $ABCDEFGH$ è inscritto in una circonferenza. Se gli angoli interni in A , in C e in E misurano rispettivamente 139° , 150° e 106° , quanto misura, in gradi, l'angolo interno in G ?
10. Il piano di un tavolo da biliardo, anziché avere la solita forma rettangolare, è un triangolo isoscele ABC , di base AB , avente le seguenti proprietà:
 - a. la misura dell'angolo interno in C , espressa in gradi, è intera;
 - b. è possibile scagliare la palla da biliardo da un punto della base AB in modo da farla rimbalzare 8 volte sui lati CA e CB (cioè 4 volte su ciascun lato) prima che torni a rimbalzare sul lato AB .Qual è l'ampiezza massima che può avere l'angolo interno in C ?
11. Nel triangolo ABC indichiamo con P il punto interno che dista più di tutti gli altri dal bordo, e con H la sua proiezione su BC . Sapendo che le misure dei lati, espresse in centimetri, sono rispettivamente $AB = 8824$, $BC = 10123$ e $CA = 9075$, trovare la misura, sempre in centimetri, di CH .
12. Del triangolo ABC sappiamo che $AB = 77$, $BC = 123$ e $CA = 130$. Trovare l'altezza relativa al lato AB .
13. Del triangolo ABC sappiamo che $AB = 77$, $BC = 123$ e $CA = 130$. Sia P un punto interno al triangolo (in particolare P non sta sui lati) e sia S la somma delle distanze di P dai 3 lati del triangolo. Quanti diversi valori interi può assumere S ?

14. Del triangolo ABC sappiamo che $AB = 77$, $BC = 123$ e $CA = 130$. Sia P un punto interno al triangolo e sia \mathcal{P} il prodotto delle distanze di P dai 3 lati del triangolo. Indichiamo con \mathcal{M} il massimo valore che \mathcal{P} può assumere al variare della posizione di P .

Poiché \mathcal{M} è una frazione, dire qual è il suo denominatore dopo che è stata ridotta ai minimi termini.

15. Del parallelogrammo $ABCD$ sappiamo che ha i lati $AB = 123$, $BC = 130$ e la diagonale $CA = 77$. Quanto vale il quadrato dell'altra diagonale? (Dare come risposta le 4 cifre meno significative del risultato, cioè migliaia, centinaia, decine ed unità)

Geometria Solida

16. Conveniamo di dire che due rette sghembe nello spazio sono *sorelle* se hanno distanza uguale a 1 e ciascuna di esse ha una parallela che è perpendicolare all'altra. Ora, se r e s sono *sorelle*, quante sono le rette dello spazio ad essere *sorelle* di entrambe?

17. Calcolare il volume del poliedro (attenzione: non è un tronco di piramide) rappresentato nella figura seguente:

$A \equiv (4, 3, 0)$
 $B \equiv (-4, 3, 0)$
 $C \equiv (-4, -3, 0)$
 $D \equiv (4, -3, 0)$
 $E \equiv (1, 1, 10)$
 $F \equiv (-1, 1, 10)$
 $G \equiv (-1, -1, 10)$
 $H \equiv (1, -1, 10)$

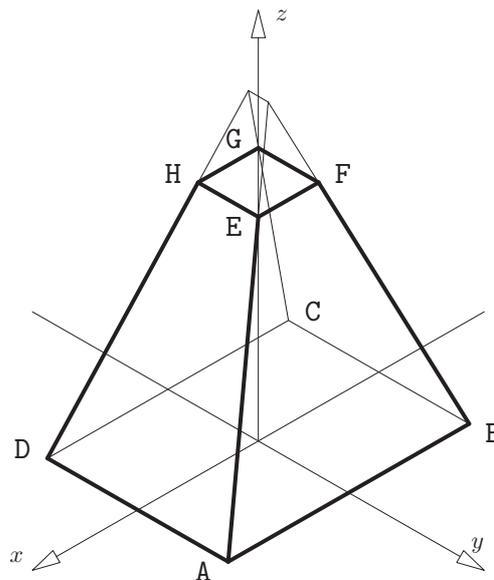


figura 1

18. Sia \mathcal{T} un tetraedro regolare con volume di 7m^3 e sia \mathcal{H} un ottaedro regolare la cui superficie totale è 72 volte quella di \mathcal{T} . Qual è (in m^3) il volume di \mathcal{H} ?

19. La *Sonda Remota* che l'*Agenzia Spaziale Italiana* ha mandato ad esplorare il pianeta *Terminus*, in previsione di una sua colonizzazione, ha rivelato che la sua superficie è perfettamente sferica e per la maggior parte coperta d'acqua. Vi è infatti un unico continente, tutto contenuto nell'emisfero nord, costituito da tutti e soli i punti del pianeta per i quali il tragitto per raggiungere il polo nord è minore o uguale di 500 Km. Sapendo che le coste del continente sono lunghe 3000 Km, dire quanto misura, in chilometri, l'equatore.

20. In un tetraedro una mediana è un segmento che unisce un vertice al baricentro della faccia opposta. Sappiamo che un tetraedro ha tre mediane lunghe 24, 26 e 28 e che inoltre, tra tutti i tetraedri con tre mediane di tali misure, è quello di volume massimo. Quanto vale il quadrato della lunghezza della quarta mediana?

21. Di una piramide irregolare con base ABC e vertice V conosciamo 2 dei 3 angoli in V delle 3 facce laterali: $\widehat{AVB} = 87^\circ$ e $\widehat{BVC} = 59^\circ$. Quanti sono i possibili valori interi per la misura, in gradi, dell'angolo \widehat{CVA} ?

22. In una piramide irregolare con base ABC e vertice V sappiamo che gli angoli in V delle 3 facce laterali hanno in sequenti valori: $\widehat{AVB} = 41^\circ$, $\widehat{BVC} = 36^\circ$ e $\widehat{CVA} = 39^\circ$. La sfera inscritta nella piramide (cioè tangente a tutte le 4 facce) tocca la faccia ABV nel punto P . Quanto vale, in gradi, l'angolo \widehat{AVP} ?

Risposte dei problemi

Problema 1	:	900
Problema 2	:	180
Problema 3	:	1820
Problema 4	:	1440
Problema 5	:	1526
Problema 6	:	1260
Problema 7	:	4028
Problema 8	:	6900
Problema 9	:	145
Problema 10	:	25
Problema 11	:	5187
Problema 12	:	120
Problema 13	:	48
Problema 14	:	1599
Problema 15	:	8129
Problema 16	:	4
Problema 17	:	220
Problema 18	:	6048
Problema 19	:	6000
Problema 20	:	2036
Problema 21	:	117
Problema 22	:	22