

Analisi Matematica 1 - Prova Simulata n. 2

Argomenti: derivazione e integrazione in 1 variabile, serie numeriche.

Titolo nota

www.problemisvolti.it

1) Calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{1}{e} \left(1 + \frac{4}{x} \right)^{\frac{x}{4}} - \frac{2}{\pi} \arctan \frac{x}{\pi} \right) = \frac{22}{3}$

2) Dire, ricorrendo eventualmente ad uno studio di funzione, quante sono le soluzioni reali dell'equazione: $5 \ln(1+x^2) = 3x + 1$
[Risposta. 3 soluzioni x_1, x_2, x_3 ; $x_1 \in (-\frac{1}{3}, 0)$, $x_2 \in (\frac{1}{3}, 3)$, $x_3 > 3$]

3) Dato l'integrale improprio (contenente il parametro $\alpha \geq 0$):

$$\int_3^{+\infty} \frac{1 - (\sqrt{\alpha} - 1) \cos x}{x^\alpha \sqrt{16 + x^{2\alpha}} (\ln(1+x))^{3-3\alpha}} dx$$

a) Calcolarlo per $\alpha = 1$. $\left[\frac{1}{4} \ln 3 \right]$

b) Studiarne il carattere al variare di α in $(0, +\infty)$.

c) (FACOLTATIVO) Studiarne il carattere per $\alpha = 0$.

PER $\alpha \geq \frac{1}{2}$ CONVERGE

PER $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ DIVERGE

PER $\alpha = 0$ DIVERGE

4) Studiare il carattere della serie: $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1 \right)$. $\left[\begin{array}{l} \text{DIVERGE A} \\ -\infty \end{array} \right]$

5) (FACOLTATIVO) Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile 10 volte. Sapendo che il suo grafico interseca l'asse x in 11 punti, mostrare che la sua derivata decima si annulla almeno in un punto.

[SUGGERIMENTO: SE $f(x)$ SI ANNULLA IN n PUNTI ALLORA $f'(x)$ SI ANNULLA IN $n-1$ PUNTI]

(Tempo: 2h e 30 min. - Punteggi dei problemi: 8 + 8 + (4+4+?) + 8 + ?)