

Secondo Esonero di Analisi Matematica I

A

A.A. 2014-2015

2 Febbraio 2015

1. Calcolare il limite:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(1+x^2) + \ln(1-x^2)) \left(x - \frac{1}{3} \arctan 3x\right) + 3x^7}{x^9} = \frac{81}{5}$

2. Dire, motivando la risposta con uno studio di funzione, quante sono le soluzioni reali dell'equazione:

$$x^{99} + 1 = 20x.$$

3 SOLUZIONI  $x_1, x_2$  e  $x_3$   
 con  $-2 < x_1 < -1$   $0 < x_2 < 1$  e  $1 < x_3 < 2$

3. Sia dato l'integrale improprio  $\int_2^{+\infty} \frac{3 + (\alpha - 2) \cos x}{x \ln^\alpha x} dx$ , calcolarlo per  $\alpha = 2$  poi studiarne, al variare di  $\alpha > 0$ , prima la convergenza assoluta, poi quella semplice.

PER  $\alpha = 2$  VALE  $\frac{3}{\ln 2}$ , PER  $\alpha \leq 1$  DIVERGE A  $+\infty$ ,  
 PER  $\alpha > 1$  CONVERGE ASSOLUTAMENTE

4. Data la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\alpha+1}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ , studiarne convergenza semplice e assoluta per  $\alpha = 2$  e per  $\alpha = 1$ .

PER  $\alpha = 2$  CONVERGE ASSOLUTAMENTE  
 PER  $\alpha = 1$  CONVERGE SEMPLICEMENTE MA NON ASSOLUTAMENTE

5. Sia  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  derivabile 2 volte e tale che, per ogni  $x \in \mathbf{R}$  si abbia  $|f''(x)| \leq 4$ . Supponiamo inoltre che  $f(x)$  sia identicamente nulla per  $x \leq 0$ .  
 Mostrare che  $|f(2)| \leq 8$ .

SUGGERIMENTO: MOSTRARE CHE  $\left. \begin{matrix} f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \\ (-2x^2)'' \leq f''(x) \leq (2x^2)'' \text{ per } x \geq 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} -2x^2 \leq f(x) \leq 2x^2 \\ \text{per } x \geq 0 \end{matrix} \right\}$

Tempo: 2 ore e 30 minuti

Punteggi: 8+8+8+8+?

Secondo Esonero di Analisi Matematica I

B

A.A. 2014-2015

2 Febbraio 2015

6. Calcolare il limite:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln^2(1+x) - \ln(1+x^2))(x - \arctan x) + \frac{1}{3}x^6}{x^7} = \frac{17}{36}$

7. Dire, motivando la risposta con uno studio di funzione, quante sono le soluzioni reali dell'equazione:  
 $x^{99} - 1 = \arctan x.$  1 SOLUZIONE  $x_1$  CON  $0 < x_1 < 1$

8. Sia dato l'integrale improprio  $\int_2^{+\infty} \frac{5 + (\alpha - 4) \cos x}{x \ln^\alpha x} dx$ , calcolarlo per  $\alpha = 4$  poi studiarne, al variare di  $\alpha > 0$ , prima la convergenza assoluta, poi quella semplice. PER  $\alpha = 4$  VALE  $\frac{5}{3(\ln 2)^3}$ . PER  $\alpha \leq 1$  DIVERGE, PER  $\alpha > 1$  CONVERGE ASSOLUTAMENTE

9. Data la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)n^\alpha} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ , studiarne convergenza semplice e assoluta per  $\alpha = 1$  e per  $\alpha = 0$ . PER  $\alpha = 1$  CONVERGE ASSOLUTAMENTE  
 PER  $\alpha = 0$  CONVERGE SEMPLICEMENTE MA NON ASSOLUTAMENTE

10. Sia  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  derivabile 2 volte e tale che, per ogni  $x \in \mathbf{R}$  si abbia  $|f''(x)| \leq 4$ . Supponiamo inoltre che  $f(x)$  sia identicamente nulla per  $x \leq 0$ .  
 Mostrare che  $|f(2)| \leq 8$ . (IDENTICO AL PROB. 5 DEL COMPITO A)

Tempo: 2 ore e 30 minuti  
 Punteggi: 8+8+8+8+?

## Secondo Esonero di Analisi Matematica I

# C

A.A. 2014-2015

2 Febbraio 2015

11. Calcolare il limite: 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{3x} - e^{-3x} - 2 \sin 3x)(\arctan x - \sin x) + 3x^6}{x^8}$$

12. Dire, motivando la risposta con uno studio di funzione, quante sono le soluzioni reali dell'equazione:

$$\sqrt[3]{x^4 + 1} = e^x.$$

13. Sia dato l'integrale improprio  $\int_2^{+\infty} \frac{5 + (\alpha - 4) \sin x}{\sqrt[3]{x^\alpha \ln^2 x}} dx$ , calcolarlo per  $\alpha = 4$  poi studiarne, al variare di  $\alpha > 0$ , prima la convergenza assoluta, poi quella semplice.

14. Data la serie  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln^\alpha n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ , studiarne convergenza semplice e assoluta per  $\alpha = 2$  e per  $\alpha = 1$ .

15. Sia  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  derivabile 2 volte e tale che, per ogni  $x \in \mathbf{R}$  si abbia  $|f''(x)| \leq 4$ . Supponiamo inoltre che  $f(x)$  sia identicamente nulla per  $x \leq 0$ .  
Mostrare che  $|f(2)| \leq 8$ .

**Tempo:** 2 ore e 30 minuti

**Punteggi:** 8+8+8+8+?

## Secondo Esonero di Analisi Matematica I

# D

A.A. 2014-2015

2 Febbraio 2015

16. Calcolare il limite: 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1-x^2} - \cos x)(\sin 4x - 2 \sin 2x) - \frac{4}{3}x^7}{x^9}$$

17. Dire, motivando la risposta con uno studio di funzione, quante sono le soluzioni reali dell'equazione:

$$\sqrt[4]{x^4 + 1} = e^{-x}.$$

18. Sia dato l'integrale improprio  $\int_2^{+\infty} \frac{3 + (\alpha - 2) \sin x}{\sqrt{x^\alpha \ln^2 x}} dx$ , calcolarlo per  $\alpha = 2$  poi studiarne, al variare di  $\alpha > 0$ , prima la convergenza assoluta, poi quella semplice.

19. Data la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ , studiarne convergenza semplice e assoluta per  $\alpha = 2$  e per  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

20. Sia  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  derivabile 2 volte e tale che, per ogni  $x \in \mathbf{R}$  si abbia  $|f''(x)| \leq 4$ . Supponiamo inoltre che  $f(x)$  sia identicamente nulla per  $x \leq 0$ .  
Mostrare che  $|f(2)| \leq 8$ .

**Tempo:** 2 ore e 30 minuti

**Punteggi:** 8+8+8+8+?