ANALISI MATEMATICA 1

Laurea Triennale in Matematica

5 luglio 2022

II Appello sessione estiva 2021/22

Docente R. Ghezzi — Codocente E. Callegari

Per lo svolgimento dell'esame è vietato l'uso di calcolatrici e cellulari. È ammessa invece la consultazione dei propri appunti del corso.

Tutte le risposte vanno adeguatamente dimostrate, eventualmente enunciando dei risultati visti a lezione.

Si ricorda che per verificare un asserto occorre una dimostrazione, mentre per confutarlo basta un controesempio.

Esercizio 1 [8 punti]

Confrontare, per n che tende a $+\infty$, le seguenti successioni

$$a_n = \sqrt[100]{n+1}, \quad b_n = (\log n)^{100}, \quad c_n = \log(1+n^{100}), \quad d_n = (\log n)^{\log(\log n)}.$$

Esercizio 2 [4 punti]

Si consideri la funzione

$$f(x) = \sin x + \sin\left(x + \frac{1}{1+x^2}\right).$$

— Mostrare che $\sup\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\} = 2$.

— Mostrare che f non ammette massimo.

Esercizio 3 [6 punti]

Sia $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione continua e tale che $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n f(n) = -3$.
Dimostrare che

1. $]-3,3[\subset f([0,+\infty[)$;
2. esiste una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,+\infty[$ tale che $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ e per ogni n vale $f(x_n) = 0$;
3. se in più f è derivabile su $]0,+\infty[$, allora esiste una successione $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,+\infty[$ tale che $\lim_{n\to+\infty} z_n = +\infty$ e per ogni n vale $f'(z_n) = 0$.

Esercizio 4 [10 punti]

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x}{x-1} + \log x.$$

— Determinare il dominio, il segno della funzione, i limiti agli estremi del dominio, l'immagine di f. La funzione è limitata?

— Determinare eventuali asintoti, massimi/minimi e dire se sono relativi o assoluti.

GIRARE

— Determinare l'insieme di continuità e di derivabilità di f.
— Quanti zeri ha la funzione?
Tracciare un abbozzo del grafico.

Esercizio 5 [8 punti]

Sia $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a,b]$ e derivabile su $]a,b[$. Supponiamo che esistano

$$\lim_{x\to a^+} \frac{h(x)-h(a)}{x-a} = \ell_1, \qquad \lim_{x\to b^-} \frac{h(x)-h(b)}{x-b} = \ell_2.$$

Dimostrare che

(i) se $\ell_1 < 0$ allora a è un punto di massimo relativo per h;
(ii) se $\ell_2 > 0$ allora b è un punto di massimo relativo per h;
(iii) se $\ell_1 < 0$ e $\ell_2 > 0$ allora esiste un punto di minimo interno ad $]a,b[$.