ANALISI MATEMATICA 1 a.a. 2022/23

Laurea Triennale in Matematica
I Appello sessione estiva anticipata 2022/23
28 febbraio 2023

Docente R. Ghezzi, Codocente E. Callegari

Tutte le risposte vanno giustificate. Per confutare un enunciato basta esibire un controesempio, cioè un oggetto che soddisfi tutte le ipotesi ma non soddisfi la tesi. È consentito l'uso degli appunti. Non è consentito consultare libri né usare la calcolatrice.

Esercizio 1 Considerare la successione

$$a_n = \left\{\frac{n}{2}\right\} + \left\{\frac{n}{3}\right\},$$

dove $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ denota la parte frazionaria di un numero non negativo x.
Verificare che a_n è limitata e calcolare $\liminf_{n\to+\infty} a_n$ e $\limsup_{n\to+\infty} a_n$.
Quali sono i punti di accumulazione dell'insieme $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$?

Esercizio 2 Considerare la successione definita dalla ricorrenza

$$\begin{cases} a_{n+1} = e^{a_n - 1}, \\ a_0 = \alpha. \end{cases}$$

Studiare la natura di $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{e^{-x^2} - e^{x^2} + 2x^2 \sin\sqrt{x}}.$$

Esercizio 4

a) Dare un esempio di funzione $g :]0,1[\to]0,1[$ continua e suriettiva. Dimostrare che non esiste una funzione $h : [0,1] \to]0,1[$ continua e suriettiva.

b) Per quali valori di $\beta > 0$ la funzione $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^{2\beta}$ è uniformemente continua sul suo dominio ?

Esercizio 5 Sia $n \in \mathbb{N}$. Quante soluzioni ha l'equazione

$$\text{(E)} \quad (x^2 + x)e^{-x} = \frac{1}{n} \quad ?$$

Sia x_n la soluzione di (E) che soddisfa $0 < x_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Dimostrare che $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$. (In questo esercizio è utile sapere che $(2+\sqrt{5})e^{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \sim 0,84$)

Esercizio 6 Sia $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione tale che $f(0) = -1$ e $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$. Dimostrare le seguenti affermazioni.

a) Se f è continua allora l'equazione $f(x) = 0$ ammette soluzioni.

b) Se f è derivabile allora non può essere che $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

c) Se f è convessa allora $f(1) \leq 0$.