ANALISI MATEMATICA 1

Laurea Triennale in Matematica
II Appello sessione autunnale a.a. 2022/23
21 settembre 2023

Docente R. Ghezzi, Codocente E. Callegari

Tutte le risposte vanno giustificate. Per confutare un enunciato basta esibire un controesempio, cioè un oggetto che soddisfi tutte le ipotesi ma non soddisfi la tesi. È consentito l'uso degli appunti. Non è consentito consultare libri né usare la calcolatrice.

Esercizio 1 [3+3+3pti] Discutere, e calcolare quando esistono, i seguenti limiti :

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x};\quad b)\ \lim_{x\to 0^+} x^{\sin x};\quad c)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

Esercizio 2 [3pti] Sia $a_n = \arctan((-2)^n)$. Calcolare $\limsup_{n\to+\infty} a_n$ e $\liminf_{n\to+\infty} a_n$. La successione è convergente ?

(*Si ricorda che per dimostrare che per calcolare massimo limite e minimo limite NON basta dire che la successione è compresa tra due valori*)

Esercizio 3 [6 pti] Data la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_{n+1} & = \frac{1}{3}(a_n^2 + 2a_n), \\ a_0 & = \alpha, \end{cases}$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$, determinare la funzione che definisce la ricorrenza. Studiare la natura della successione al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4 [4+2pti] Studiare la funzione $f(x) = x^4 e^{-x}$ (dominio, limiti agli estremi del dominio, punti di estremo, abbozzo del grafico). Dato l'insieme $A = \{n^4 e^{-n}, n \in \mathbb{N}\}$, calcolare l'estremo superiore ed inferiore di A.

Esercizio 5 [2+2+2pti] Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa giustificando la risposta.

1. $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
2. Se $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
3. Se $\lim_{x\to-\infty} g(x) \neq +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x) \neq +\infty$ allora g è costante.

Esercizio 6 [2+2+2pti] Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni che soddisfano le seguenti ipotesi : f e g continue, f crescente, g decrescente,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

a) Dimostrare che esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $f(\alpha) = g(\alpha)$.

b) Dimostrare che, se una tra f e g è strettamente monotona allora esiste un unico $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $f(\alpha) = g(\alpha)$.

c) Sia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e monotona. Allora l'equazione $(h(x))^2 = x^2$ ammette soluzione.