Analisi Matematica 1 - Lista n. 2

Quesiti sui primi elementi di Topologia di R.

www.problemisvolti.it

Ricordando che $I_\rho(x_0)$ è l'intorno di x_0 di raggio ρ, dire chi sono i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

1) $I_3(2) \cap I_3(-2)$

2) $I_3(2) \cup I_3(-2)$

3) $I_3\left(\frac{3}{2}\right) \setminus I_1(0)$

4) $I_3(2) \cap \left(I_{\frac{1}{2}}(1)\right)^c$

Trovare le seguenti unioni e/o intersezioni di famiglie infinite di insiemi:

5) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{n+1}, +\infty\right)$

6) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n+1}, +\infty\right)$

7) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n+1}, 1+\frac{1}{n+1}\right)$

8) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\left(-\infty, -\frac{1}{n+1}\right] \cup \left[1+\frac{1}{n+1}, +\infty\right)\right)$

9) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(0, \frac{1}{n+1}\right)$

10) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left[0, \frac{1}{n+1}\right)$

11) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{-n, n\}$

12) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{m\in\mathbb{Z}} \left\{\frac{m}{n+1}\right\}\right)$

13) $\displaystyle\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(q-\frac{1}{n+1}, q+\frac{1}{n+1}\right)\right)$

14) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \left(q-\frac{1}{n+1}, q+\frac{1}{n+1}\right)\right)$

15) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \left[0, 1+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{m+1}\right]\right)$

16) $\displaystyle\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left[0, 1+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{m+1}\right]\right)$

Nei seguenti casi, dell'insieme $A \subset \mathbb{R}$, determinare punti interni, esterni, di frontiera, di accumulazione e isolati. Fare poi lo stesso anche con il complementare di A. Infine dire se A o il suo complementare sono insiemi aperti, chiusi, densi o discreti.

17) $A = [-1, +\infty)$

18) $A = (-1, 1)$

19) $A = \{1\}$

20) $A = \mathbb{R}$

21) $A = \mathbb{Z}$

22) $A = (0,1) \cup (1,2)$

23) $A = \mathbb{Q}$

24) $A = \left\{ \frac{1}{n+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$

25) $A = \left\{ \frac{1}{n+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$

26) $A = \left\{ \frac{m}{2^n} \;\middle|\; n, m \in \mathbb{N},\ 0 < m < 2^n \right\}$

27) $A = \left\{ \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$

28) $A = \left\{ \sqrt{n} - \sqrt{m} \;\middle|\; n, m \in \mathbb{N} \right\}$

29) Dimostrare che gli unici sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che sono sia chiusi che aperti sono solo $\emptyset$ e tutto $\mathbb{R}$.

30) È vero che un insieme discreto non ha punti di accumulazione? Se vero, dimostrarlo. Se è falso, esibire un controesempio.

Di ciascuna delle seguenti relazioni tra insiemi, dire se è **vera per ogni** $A \subset \mathbb{R}$ oppure se è **falsa per qualche** $A \subset \mathbb{R}$. Nel primo caso dimostrarla, nel secondo caso trovare almeno un $A \subset \mathbb{R}$ che la rende falsa.

[Notazioni: A^c = complementare di A, $\mathring{A}$ = parte interna di A, $\overline{A}$ = chiusura di A, ∂A = frontiera di A, DA = derivato di A]

31) $\mathring{A} \subset \mathring{\overline{A}}$ [SIGNIFICA: "PARTE INTERNA DELLA CHIUSURA"]

32) $\mathring{A} = \mathring{\overline{A}}$

33) $(\mathring{A})^c = \overline{A^c}$

34) $(\overline{A})^c = (A^c)^\circ$ $(\dots)^\circ$ SIGNIFICA PARTE INTERNA DI...

35) $\partial A = \partial(\mathring{A})$

36) $\overline{A} = \overline{\overline{A}}$

37) $\partial(\partial A) = \partial A$

38) $\partial(\overline{A^c}) = \partial(\mathring{A})$