# Prerequisiti e Topologia

lista **E1**

32 problemi assegnati nelle prove d'esame

**Nota.** Lo studente ricordi che questi quesiti sono stati assegnati nelle prove d'esame, cioè a fine corso. Ciò significa che potrebbero richiedere anche la conoscenza di argomenti che a questo punto del corso non sono ancora noti. Tuttavia, tutte le volte in cui ciò accade lo segnaleremo.

## A.A. 2014/2015

**1.** [26 Novembre 2014 - **I Esonero** - fila **A**] Dato l'insieme $A = (\mathbf{Q} \cap (-1,0]) \cup \left\{ \frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbf{N} \right\}$ trovare (se esistono) $\inf A$, $\min A$, $\sup A$ e $\max A$. Trovare poi $\partial A$, $\partial(\partial A)$ e $\partial(\partial(\partial A))$.
**Facoltativo:** dire, motivando la risposta, se esistono insiemi $B \subset \mathbf{R}$ tali che $\partial(\partial B) \neq \partial(\partial(\partial B))$

**2.** [26 Novembre 2014 - **I Esonero** - fila **B**] Dato l'insieme $A = (\mathbf{Q} \cap [0,2)) \cup \left\{ -\frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N} - \{0\} \right\}$ trovare (se esistono) $\inf A$, $\min A$, $\sup A$ e $\max A$. Trovare poi $\partial A$, $\partial(\partial A)$ e $\partial(\partial(\partial A))$.
**Facoltativo:** dire, motivando la risposta, se esistono insiemi $B \subset \mathbf{R}$ tali che $\partial(\partial B) \neq \partial(\partial(\partial B))$

**3.** [26 Novembre 2014 - **I Esonero** - fila **C**] Dato l'insieme $A = ([1,4) \cap \mathbf{Q}) \cup \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N} - \{0\} \right\}$ trovare (se esistono) $\inf A$, $\min A$, $\sup A$ e $\max A$. Trovare poi $\partial A$, $\partial(\partial A)$ e $\partial(\partial(\partial A))$.
**Facoltativo:** dire, motivando la risposta, se esistono insiemi $B \subset \mathbf{R}$ tali che $\partial(\partial B) \neq \partial(\partial(\partial B))$

**4.** [26 Novembre 2014 - **I Esonero** - fila **D**] Dato l'insieme $A = ((-1,1) \cap \mathbf{Q}) \cup \left\{ 2 - \frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbf{N} \right\}$ trovare (se esistono) $\inf A$, $\min A$, $\sup A$ e $\max A$. Trovare poi $\partial A$, $\partial(\partial A)$ e $\partial(\partial(\partial A))$.
**Facoltativo:** dire, motivando la risposta, se esistono insiemi $B \subset \mathbf{R}$ tali che $\partial(\partial B) \neq \partial(\partial(\partial B))$

**5.** [6 Febbraio 2015 - **I Appello Invernale** - fila **A**] Trovare, motivando la risposta, punti interni, esterni, di frontiera e di accumulazione dell'insieme:

$$A = (\mathbf{Q} \cap [2014, 2015)) \cup \{2016\}.$$

**6.** [6 Febbraio 2015 - **I Appello Invernale** - fila **B**] Trovare, motivando la risposta, punti interni, esterni, di frontiera e di accumulazione dell'insieme:

$$A = (\mathbf{Q} \cap [2015, 2016)) \cup \{2014\}.$$

**7.** [6 Febbraio 2015 - **I Appello Invernale** - fila **C**] Trovare, motivando la risposta, punti interni, esterni, di frontiera e di accumulazione dell'insieme:

$$A = (\mathbf{Q} - [2014, 2016)) \cup \{2015\}.$$

**8.** [6 Febbraio 2015 - **I Appello Invernale** - fila **D**] Trovare, motivando la risposta, punti interni, esterni, di frontiera e di accumulazione dell'insieme:

$$A = ([2014, 2015] - \mathbf{Q}) \cup \{2016\}.$$

**9.** [19 Febbraio 2015 - **II Appello Invernale** - fila **A**] Dato l'insieme $A = \left\{ \left( \frac{n+1}{n+2} \right)^{n+2} \mid n \in \mathbf{N} \right\}$, determinare, se esistono, $\inf A$, $\sup A$, $\min A$ e $\max A$, motivando le risposte date.

**10.** [19 Febbraio 2015 - **II Appello Invernale** - fila **B**] Dato l'insieme $A = \left\{ \left( \frac{n+1}{n+2} \right)^{n+1} \mid n \in \mathbf{N} \right\}$, determinare, se esistono, $\inf A$, $\sup A$, $\min A$ e $\max A$, motivando le risposte date.

**11.** [19 Febbraio 2015 - **II Appello Invernale** - fila **C**] Dato l'insieme $A = \left\{ \left( \frac{n+2}{n+1} \right)^{n+1} \mid n \in \mathbf{N} \right\}$, determinare, se esistono, $\inf A$, $\sup A$, $\min A$ e $\max A$, motivando le risposte date.

**12.** [19 Febbraio 2015 - **II Appello Invernale** - fila **D**] Dato l'insieme $A = \left\{ \left( \frac{n+2}{n+1} \right)^{n+2} \mid n \in \mathbf{N} \right\}$, determinare, se esistono, $\inf A$, $\sup A$, $\min A$ e $\max A$, motivando le risposte date.

**13.** [17 Luglio 2015 - **II Appello Estivo** - fila **A**] Sia $A \subset \mathbf{R}$ il complementare di $\mathbf{Z}$, cioè $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x \text{ non è intero}\}$. Trovare, motivando la risposta, punti interni, esterni, di frontiera e di accumulazione dell'insieme $A$.

**14.** [22 Settembre 2015 - **II Appello Autunnale** - fila **A**] Trovare, motivando la risposta, punti interni, esterni, di frontiera e di accumulazione dell'insieme:

$$A = (\mathbf{Q} \cap [-1, 1]) \cup (1, +\infty).$$

# A.A. 2015/2016

**15.** [4 Dicembre 2015 - **I Esonero** - fila **A**] Dato l'insieme $A = \mathbf{Q} \cap [1, +\infty)$, la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ e l'insieme $B = f(A)$, trovare (se esistono) $\inf B$, $\min B$, $\sup B$ e $\max B$. Trovare poi $\partial B$ e $\partial(\partial B)$.

**16.** [4 Dicembre 2015 - **I Esonero** - fila **B**] Dato l'insieme $A = \mathbf{Q} \cap [1, +\infty)$, la funzione $f(x) = 2x + 1$ e l'insieme $B = f(A)$, trovare (se esistono) $\inf B$, $\min B$, $\sup B$ e $\max B$. Trovare poi $\partial B$ e $\partial(\partial B)$.

**17.** [4 Dicembre 2015 - **I Esonero** - fila **C**] Dato l'insieme $A = \mathbf{Q} \cap (-\infty, -2)$, la funzione $f(x) = 2x + 1$ e l'insieme $B = f(A)$, trovare (se esistono) $\inf B$, $\min B$, $\sup B$ e $\max B$. Trovare poi $\partial B$ e $\partial(\partial B)$.

**18.** [4 Dicembre 2015 - **I Esonero** - fila **D**] Dato l'insieme $A = \mathbf{Q} \cap (-\infty, -1)$, la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ e l'insieme $B = f(A)$, trovare (se esistono) $\inf B$, $\min B$, $\sup B$ e $\max B$. Trovare poi $\partial B$ e $\partial(\partial B)$.

**19.** [9 Settembre 2016 - **I Appello Autunnale** - file **A** e **B**] Data $f(x) = -\frac{x + |x|}{2}$

(**a**) trovare $f(f(x))$;

(**b**) (facoltativo) ispirandosi eventualmente al punto (a) trovare $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tale che $\overbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}^{2016}$ sia identicamente nulla ma $\overbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}^{2015}$ non lo sia.

**20.** [23 Settembre 2016 - **II Appello Autunnale** - file **A** e **B**] Sia dato l'insieme $A = \{\sqrt{m} - \sqrt{n} \mid n, m \in \mathbf{N}\}$

(**a**) mostrare che 0 è un punto di accumulazione per $A$;

(**b**) (facoltativo) Mostrare che $A$ è denso in $\mathbf{R}$.

# A.A. 2016/2017

**21.** [30 Novembre 2016 - **I Esonero** - fila **A**] Dato l'insieme $A = \{\log_2 (n + 15) - \log_2 n \mid n \in \mathbf{N} - \{0\}\}$, trovare (se esistono) $\inf A$, $\min A$, $\sup A$ e $\max A$.

**22.** [30 Novembre 2016 - **I Esonero** - fila **B**] Dato l'insieme $A = \left\{ \log_5(n+4) - \log_5 n \;\middle|\; n \in \mathbf{N} - \{0\} \right\}$, trovare (se esistono) $\inf A$, $\min A$, $\sup A$ e $\max A$.

**23.** [30 Novembre 2016 - **I Esonero** - fila **C**] Dato l'insieme $A = \left\{ \log_3(n+26) - \log_3 n \;\middle|\; n \in \mathbf{N} - \{0\} \right\}$, trovare (se esistono) $\inf A$, $\min A$, $\sup A$ e $\max A$.

**24.** [30 Novembre 2016 - **I Esonero** - fila **D**] Dato l'insieme $A = \left\{ \log_4(n+15) - \log_4 n \;\middle|\; n \in \mathbf{N} - \{0\} \right\}$, trovare (se esistono) $\inf A$, $\min A$, $\sup A$ e $\max A$.

**25.** [7 Febbraio 2017 - **I Appello Inv.** e **Recupero I Eso.** - fila **A**] Data la funzione $f(x) = \dfrac{20x}{25+x^2}$, si consideri l'insieme $A = \left\{ f(n) \;\middle|\; n \in \mathbf{N} - \{0\} \right\}$. Trovare (se esistono) $\inf A$, $\min A$, $\sup A$ e $\max A$.

**26.** [7 Febbraio 2017 - **I Appello Inv.** e **Recupero I Eso.** - fila **B**] Data la funzione $f(x) = \dfrac{24x}{9+x^2}$, si consideri l'insieme $A = \left\{ f(n) \;\middle|\; n \in \mathbf{N} - \{0\} \right\}$. Trovare (se esistono) $\inf A$, $\min A$, $\sup A$ e $\max A$.

**27.** [7 Febbraio 2017 - **I Appello Inv.** e **Recupero I Eso.** - fila **C**] Data la funzione $f(x) = \dfrac{12x}{36+x^2}$, si consideri l'insieme $A = \left\{ f(n) \;\middle|\; n \in \mathbf{N} - \{0\} \right\}$. Trovare (se esistono) $\inf A$, $\min A$, $\sup A$ e $\max A$.

**28.** [7 Febbraio 2017 - **I Appello Inv.** e **Recupero I Eso.** - fila **D**] Data la funzione $f(x) = \dfrac{40x}{16+x^2}$, si consideri l'insieme $A = \left\{ f(n) \;\middle|\; n \in \mathbf{N} - \{0\} \right\}$. Trovare (se esistono) $\inf A$, $\min A$, $\sup A$ e $\max A$.

**29.** [22 Febbraio 2017 - **II Appello Inv.** e **Recupero I Eso.** - fila **A**] Data la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x-2017}$, si consideri l'insieme $A = \left\{ f(x) \;\middle|\; x \in \mathbf{Q} \cap (2017, +\infty) \right\}$. Trovare (se esistono) $\inf A$, $\min A$, $\sup A$ e $\max A$. Determinare inoltre la frontiera di $A$.

**30.** [22 Febbraio 2017 - **II Appello Inv.** e **Recupero I Eso.** - fila **B**] Data la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x+2017}$, si consideri l'insieme $A = \left\{ f(x) \;\middle|\; x \in \mathbf{Q} \cap (-2017, +\infty) \right\}$. Trovare (se esistono) $\inf A$, $\min A$, $\sup A$ e $\max A$. Determinare inoltre la frontiera di $A$.

**31.** [22 Febbraio 2017 - **II Appello Inv.** e **Recupero I Eso.** - fila **C**] Data la funzione $f(x) = \dfrac{1}{2017-x}$, si consideri l'insieme $A = \left\{ f(x) \;\middle|\; x \in \mathbf{Q} \cap (-\infty, 2017) \right\}$. Trovare (se esistono) $\inf A$, $\min A$, $\sup A$ e $\max A$. Determinare inoltre la frontiera di $A$.

**32.** [22 Febbraio 2017 - **II Appello Inv.** e **Recupero I Eso.** - fila **D**] Data la funzione $f(x) = \dfrac{1}{2017+x}$, si consideri l'insieme $A = \left\{ f(x) \;\middle|\; x \in \mathbf{Q} \cap (-\infty, -2017) \right\}$. Trovare (se esistono) $\inf A$, $\min A$, $\sup A$ e $\max A$. Determinare inoltre la frontiera di $A$.