Successioni

lista **E2**

61 problemi assegnati
nelle prove d'esame

Nota. Lo studente ricordi che questi quesiti sono stati assegnati nelle prove d'esame, cioè a fine corso. Ciò significa che potrebbero richiedere anche la conoscenza di argomenti che a questo punto del corso non sono ancora noti. Tuttavia, tutte le volte in cui ciò accade lo segnaleremo con un asterisco (*). Inoltre segnaleremo con un pallino nero ($^\bullet$) tutte le volte che del quesito sia disponibile il video con lo svolgimento.

A.A. 2014/2015

1. [26 Novembre 2014 - **I Esonero** - fila **A**] Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(2-\frac{1}{n}\right)^n-3^{\sqrt{n}}}{2^n+\ln\left(1+n^n\right)}$.

2. [26 Novembre 2014 - **I Esonero** - fila **B**] Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(3+\frac{1}{n}\right)^n-n^3}{3^n+\ln\left(1+n^n\right)}$.

3. [26 Novembre 2014 - **I Esonero** - fila **C**] Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{\ln n}-(\ln n)^n}{2^n+\ln\left(1+n^n\right)}$.

4. [26 Novembre 2014 - **I Esonero** - fila **D**] Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{(\ln n)^{\ln n}-\sqrt{n}}{n^5+\ln\left(1+n^n\right)}$.

5. [26 Novembre 2014 - **I Esonero** - fila **A**] Mettere in ordine di infinito crescente le seguenti successioni:

$$a_n=n^{200}\qquad b_n=\left(n^2\right)!\qquad c_n=\left(n^2\right)^n\qquad d_n=n^{n^2}.$$

6. [26 Novembre 2014 - **I Esonero** - fila **B**] Mettere in ordine di infinito crescente le seguenti successioni:

$$a_n=2^n\qquad b_n=\left(n^2\right)!\qquad c_n=(n!)^2\qquad d_n=n^{n^2}.$$

7. [26 Novembre 2014 - **I Esonero** - fila **C**] Mettere in ordine di infinito crescente le seguenti successioni:

$$a_n=200n\qquad b_n=\left(n^2\right)!\qquad c_n=2^{n^3}\qquad d_n=n^{n^2}.$$

8. [26 Novembre 2014 - **I Esonero** - fila **D**] Mettere in ordine di infinito crescente le seguenti successioni:

$$a_n=\ln(n^{200})\qquad b_n=\left(n^2\right)!\qquad c_n=2^{n!}\qquad d_n=n^{n^2}.$$

9. *[6 Febbraio 2015 - **I Appello Invernale** - fila **A**] Confrontare l'ordine di infinitesimo delle seguenti successioni:

$$a_n=\sqrt[n]{1-\cos\frac{1}{n^n}}\qquad b_n=\frac{(n+2)^n}{n^{n+2}}\qquad c_n=\frac{1}{n^2}.$$

10. *[6 Febbraio 2015 - **I Appello Invernale** - fila **B**] Confrontare l'ordine di infinitesimo delle seguenti successioni:

$$a_n = \sqrt[2n]{e^{\frac{1}{n^n}} - 1} \qquad b_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} \qquad c_n = \frac{1}{\ln^2(1+n)}.$$

11. *[6 Febbraio 2015 - **I Appello Invernale** - fila **C**] Confrontare l'ordine di infinitesimo delle seguenti successioni:

$$a_n = \sqrt[2n]{\ln\left(1+\frac{1}{n^n}\right)} \qquad b_n = \frac{10^{\sqrt{n}}}{4^n} \qquad c_n = \frac{1}{\ln(1+n^2)}.$$

12. *[6 Febbraio 2015 - **I Appello Invernale** - fila **D**] Confrontare l'ordine di infinitesimo delle seguenti successioni:

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{1}{n^n} - \sin\frac{1}{n^n}} \qquad b_n = \frac{n^n}{(n+3)^{n+3}} \qquad c_n = \frac{1}{n^3}.$$

13. [7 Luglio 2015 - **I Appello Estivo** - fila **A**] Sia data la successione $a_n = (-1)^n + \frac{\sin n}{n}$.

(**a**) Trovare due sottosuccessioni di a_n che tendano a limiti diversi.

(**b**) Determinare, motivando la risposta, l'insieme $A = \{x \in \mathbf{R} \mid \text{definitivamente in } n \text{ si ha } a_n \le x\}$.

14. [7 Luglio 2015 - **I Appello Estivo** - fila **A**] Date le successioni $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^3}$ e $b_n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n^3}$ dire, motivando la risposta con gli opportuni calcoli, se vanno all'infinito con lo stesso ordine oppure no.

15. [17 Luglio 2015 - **II Appello Estivo** - fila **A**] Confrontare l'ordine di infinito delle seguenti successioni:

$$a_n = \left((n!)^n\right)^2 \qquad b_n = 2^{n^3} \qquad c_n = n^{n^2}.$$

16. [7 Settembre 2015 - **I Appello Autunnale** - fila **A**] Sia data la successione $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$.

(**a**) Determinare, motivando la risposta, l'insieme $A = \{x \in \mathbf{R} \mid \text{definitivamente in } n \text{ si ha } a_n \ge x\}$.

(**b**) Determinare, motivando la risposta, l'insieme $B = \{x \in \mathbf{R} \mid \text{frequentemente in } n \text{ si ha } a_n > x\}$.

(**c**) Trovare, se esiste, una successione a_n per la quale risulti $A = B$. Motivare la risposta.

17. [7 Settembre 2015 - **I Appello Autunnale** - fila **A**] Confrontare l'ordine di infinito delle seguenti successioni:

$$a_n = 2^{n^2} \qquad b_n = n^{20} \cdot 20^n \qquad c_n = n^{200} \cdot 2^n \qquad d_n = n^n.$$

A.A. 2015/2016

18. *[4 Dicembre 2015 - **I Esonero** - fila **A**] Calcolare $\lim_{n\to+\infty} n \cdot \arctan e^n \cdot \arctan e^{-n}$.

19. *[4 Dicembre 2015 - **I Esonero** - fila **B**] Calcolare $\lim_{n\to+\infty} 2^n \cdot \sin e^n \cdot \sin e^{-n}$.

20. *[4 Dicembre 2015 - **I Esonero** - fila **C**] Calcolare $\lim_{n\to+\infty} n^2 \cdot \ln(1+e^n) \cdot \ln\left(1+e^{-n}\right)$.

21. *[4 Dicembre 2015 - **I Esonero** - fila **D**] Calcolare $\lim_{n\to+\infty} 2^n \cdot \left(\sqrt{1+4^n}-1\right) \cdot \left(\sqrt{1+4^{-n}}-1\right)$.

22. [4 Dicembre 2015 - **I Esonero** - fila **A**] Confrontare gli ordini di infinito (dicendo anche se sono asintoticamente equivalenti) delle successioni che seguono: $a_n = n^n \qquad b_n = e^{n^2} \quad$ e $\quad c_n = \left(e - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

23. [4 Dicembre 2015 - **I Esonero** - fila **B**] Confrontare gli ordini di infinito (dicendo anche se sono asintoticamente equivalenti) delle successioni che seguono: $a_n = (\ln n)^n \qquad b_n = e^n \quad$ e $\quad c_n = \left(e + \frac{1}{n}\right)^n$.

24. [4 Dicembre 2015 - **I Esonero** - fila **C**] Confrontare gli ordini di infinito (dicendo anche se sono asintoticamente equivalenti) delle successioni che seguono: $a_n = n! \qquad b_n = e^{n^2} \quad$ e $\quad c_n = e^{\left(n+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}$.

25. [4 Dicembre 2015 - **I Esonero** - fila **D**] Confrontare gli ordini di infinito (dicendo anche se sono asintoticamente equivalenti) delle successioni che seguono: $a_n = n^{2n} \qquad b_n = 2^{n^2} \quad$ e $\quad c_n = 2^{\sqrt{n^4+n^3}}$.

26. [4 Febbraio 2016 - **I Appello Invernale** - fila **A**] Confrontare gli ordini di infinito (dicendo anche se sono asintoticamente equivalenti) delle successioni che seguono: $a_n = 2^{n^2}, \qquad b_n = 2^{\sqrt{n^4+n^3}} \quad$ e $\quad c_n = (n^n)^2$.

27. [4 Febbraio 2016 - **I Appello Invernale** - fila **B**] Confrontare gli ordini di infinito (dicendo anche se sono asintoticamente equivalenti) delle successioni che seguono: $a_n = 2^{n^2}, \qquad b_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \quad$ e $\quad c_n = (n!)^2$.

28. [4 Febbraio 2016 - **I Appello Invernale** - fila **C**] Confrontare gli ordini di infinito (dicendo anche se sono asintoticamente equivalenti) delle successioni che seguono: $a_n = 2^{n^2}, \qquad b_n = 2^{\frac{n^3}{n-1}} \quad$ e $\quad c_n = (4n)!$.

29. [4 Febbraio 2016 - **I Appello Invernale** - fila **D**] Confrontare gli ordini di infinito (dicendo anche se sono asintoticamente equivalenti) delle successioni che seguono: $a_n = 2^{n^2}, \qquad b_n = 2^{\left(n+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2} \quad$ e $\quad c_n = (n+1)^{3n}$.

30. [18 Febbraio 2016 - **II Appello Invernale** - fila **A**] Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{n}} + \sqrt{e^n} + 7\sin\left(e^{n^2}\right)}{e^{\sqrt{n}} + 5\sqrt{e^n} + \sin\left(e^{n^2}\right)}$.

31. [18 Febbraio 2016 - **II Appello Invernale** - fila **B**] Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{4^{\sqrt{n}} + \sqrt{4^n} + 8\sin(n^n)}{4^{\sqrt{n}} + 3\sqrt{4^n} + \sin(n^n)}$.

32. [18 Febbraio 2016 - **II Appello Invernale** - fila **C**] Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+n^2\right) + \ln^2(1+n) + 9\sin(n!)}{\ln(1+n^2) + 2\ln^2(1+n) + \sin(n!)}$.

33. [18 Febbraio 2016 - **II Appello Invernale** - fila **D**] Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^n + 4n^{n+1} + 3\sin\left(n^{2n}\right)}{(n+1)^n + n^{n+1} + \sin(n^{2n})}$.

34. •*[21 Giugno 2016 - **I Appello Estivo** - fila **A**] Confrontare gli ordini di infinitesimo delle successioni seguenti:

$$a_n = \sin\frac{2^n}{(n-1)!}, \qquad b_n = \frac{n^n}{(2n)!}, \qquad c_n = 3^n \ln\left(1 + \frac{1}{n!}\right), \qquad d_n = \frac{1}{n!} \cdot \ln(1+3^n).$$

35. [18 Luglio 2016 - **II Appello Estivo** - fila **A**] Confrontare gli ordini di infinito delle successioni seguenti:

$$a_n = (2n)^{n+1}, \qquad b_n = (n-1)^{2n-1}, \qquad c_n = (4+(-1)^n)^n \cdot n^n.$$

36. [18 Luglio 2016 - **II Appello Estivo** - fila **B**] Confrontare gli ordini di infinito delle successioni seguenti:

$$a_n = (2n+1)^n, \qquad b_n = (n-3)^{2n}, \qquad c_n = (4+\sin n)^{n+1} \cdot n^{n-1}.$$

37. [18 Luglio 2016 - **II Appello Estivo** - file **A** e **B**] (Facoltativo) Sia data la successione $a_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

(**a**) Esibire, motivando la risposta, una sottosuccessione di a_n che tenda a 0.

(**b**) Esibire, motivando la risposta, una sottosuccessione di a_n che tenda a 1.

(**c**) Dire, motivando la risposta, per quali altri $\lambda \in \mathbf{R}$ esiste una sottosuccessione di a_n che tende a λ.

38. [9 Settembre 2016 - **I Appello Autunnale** - fila **A**] Confrontare gli ordini di infinito delle successioni seguenti:

$$a_n = (n+1)^n, \qquad b_n = n^{n+1}, \qquad c_n = (n!)^{n!}, \qquad d_n = 2^{n^n}.$$

39. [9 Settembre 2016 - **I Appello Autunnale** - fila **B**] Confrontare gli ordini di infinito delle successioni seguenti:

$$a_n = n^{\sqrt{n}}, \qquad b_n = \left(\sqrt{n}\right)^n, \qquad c_n = (n!)^{n!}, \qquad d_n = 2^{n^n}.$$

40. [23 Settembre 2016 - **II Appello Autunnale** - fila **A**] Confrontare gli ordini di infinito delle successioni seguenti:

$$a_n = e^{\sqrt{n^3+n^2}}, \qquad b_n = e^{\sqrt{n^3+n}}, \qquad c_n = ne^{\sqrt{n^3-1}}, \qquad d_n = (2n)!$$

41. [23 Settembre 2016 - **II Appello Autunnale** - fila **B**] Confrontare gli ordini di infinito delle successioni seguenti:

$$a_n = e^{\left(n+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}, \qquad b_n = e^{\left(n+\frac{1}{n}\right)^2}, \qquad c_n = ne^{n^2-1}, \qquad d_n = (2n)!$$

A.A. 2016/2017

42. [30 Novembre 2016 - **I Esonero** - fila **A**] Confrontare gli ordini di infinito (dicendo anche se sono asintoticamente equivalenti) delle successioni che seguono:

$$a_n = (2^n)^{n!}, \qquad b_n = (2^n+1)^{n!}, \qquad c_n = ((n+1)!)^{n!}, \qquad d_n = (n!)^{(n+1)!}.$$

43. [30 Novembre 2016 - **I Esonero** - fila **B**] Confrontare gli ordini di infinito (dicendo anche se sono asintoticamente equivalenti) delle successioni che seguono:

$$a_n = \left(n^3\right)^{n!}, \qquad b_n = \left(n^3+1\right)^{n!}, \qquad c_n = (n!)^{(n+1)!}, \qquad d_n = ((n+1)!)^{n!}.$$

44. [30 Novembre 2016 - **I Esonero** - fila **C**] Confrontare gli ordini di infinito (dicendo anche se sono asintoticamente equivalenti) delle successioni che seguono:

$$a_n = \left(\sqrt{n}\right)^{n!}, \qquad b_n = \left(\sqrt{n}+1\right)^{n!}, \qquad c_n = ((n+1)!)^{n!}, \qquad d_n = (n!)^{(n+1)!}.$$

45. [30 Novembre 2016 - **I Esonero** - fila **D**] Confrontare gli ordini di infinito (dicendo anche se sono asintoticamente equivalenti) delle successioni che seguono:

$$a_n = (\ln n)^{n!}, \qquad b_n = (1+\ln n)^{n!}, \qquad c_n = (n!)^{(n+1)!}, \qquad d_n = ((n+1)!)^{n!}.$$

46. [7 Febbraio 2017 - **I Appello Inv.** e **Recupero I Eso.** - fila **A**] Confrontare gli ordini di infinito (dicendo, nel caso, anche se sono asintoticamente equivalenti) delle successioni che seguono:

$$a_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}, \qquad b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}, \qquad c_n = \left(1+\frac{1}{n+\ln n}\right)^{n^2}, \qquad d_n = 4^n.$$

47. [7 Febbraio 2017 - **I Appello Inv.** e **Recupero I Eso.** - fila **B**] Confrontare gli ordini di infinito (dicendo, nel caso, anche se sono asintoticamente equivalenti) delle successioni che seguono:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^3}, \qquad b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}, \qquad c_n = \left(1+\frac{1}{n+\ln n}\right)^{n^2}, \qquad d_n = n^n.$$

48. [7 Febbraio 2017 - **I Appello Inv.** e **Recupero I Eso.** - fila **C**] Confrontare gli ordini di infinito (dicendo, nel caso, anche se sono asintoticamente equivalenti) delle successioni che seguono:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n^2}, \qquad b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}, \qquad c_n = \left(1+\frac{1}{n+\ln n}\right)^{n^2}, \qquad d_n = 2^n.$$

49. [7 Febbraio 2017 - **I Appello Inv.** e **Recupero I Eso.** - fila **D**] Confrontare gli ordini di infinito (dicendo, nel caso, anche se sono asintoticamente equivalenti) delle successioni che seguono:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^2}, \qquad b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}, \qquad c_n = \left(1+\frac{1}{n+\ln n}\right)^{n^2}, \qquad d_n = n^2.$$

50. [22 Febbraio 2017 - **II Appello Inv.** e **Recupero I Eso.** - fila **A**] Confrontare gli ordini di infinito (dicendo, nel caso, anche se sono asintoticamente equivalenti) delle successioni che seguono:

$$a_n = 5^{\sqrt{n}\ln n}, \qquad b_n = \left(n^2\right)^{\sqrt{n}}, \qquad c_n = \left(2+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n}, \qquad d_n = 2^n.$$

51. [22 Febbraio 2017 - **II Appello Inv.** e **Recupero I Eso.** - fila **B**] Confrontare gli ordini di infinito (dicendo, nel caso, anche se sono asintoticamente equivalenti) delle successioni che seguono:

$$a_n = 10^{\sqrt{n}\ln n}, \qquad b_n = \left(n^2\right)^{\sqrt{n}}, \qquad c_n = \left(3+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n}, \qquad d_n = 3^n.$$

52. [22 Febbraio 2017 - **II Appello Inv.** e **Recupero I Eso.** - fila **C**] Confrontare gli ordini di infinito (dicendo, nel caso, anche se sono asintoticamente equivalenti) delle successioni che seguono:

$$a_n = 2^{\sqrt[3]{n}\ln n}, \qquad b_n = n^{\sqrt[3]{n}}, \qquad c_n = \left(2+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)^{\sqrt{n}}, \qquad d_n = 2^{\sqrt{n}}.$$

53. [22 Febbraio 2017 - **II Appello Inv.** e **Recupero I Eso.** - fila **D**] Confrontare gli ordini di infinito (dicendo, nel caso, anche se sono asintoticamente equivalenti) delle successioni che seguono:

$$a_n = 3^{\sqrt[3]{n}\ln n}, \qquad b_n = n^{\sqrt[3]{n}}, \qquad c_n = \left(2+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)^{\sqrt{n}}, \qquad d_n = 2^{\sqrt{n}}.$$

54. •[4 Luglio 2017 - **I Appello Estivo** - fila **A**] Confrontare gli ordini di infinito (dicendo anche se sono asintoticamente equivalenti) delle successioni che seguono:

$$a_n = \ln\left(2^n + n^{\sqrt{n}}\right), \qquad b_n = \ln\left(n^2 + n^{\sqrt{n}}\right), \qquad c_n = \ln\left(2^n + n^n\right), \qquad d_n = \ln\left(4^n + n^2\right).$$

55. [4 Luglio 2017 - **I Appello Estivo** - fila **B**] Confrontare gli ordini di infinito (dicendo anche se sono asintoticamente equivalenti) delle successioni che seguono:

$$a_n = \ln\left(2^n + \left(\sqrt{n}\right)^n\right), \qquad b_n = \ln\left(n^2 + n^{\sqrt{n}}\right), \qquad c_n = \ln\left(2^{n^2} + n^n\right), \qquad d_n = \ln\left(n^n + \left(\sqrt{n}\right)^n\right).$$

56. •[19 Luglio 2017 - **II Appello Estivo** - fila **A**] Siano date $a_n = \left(2 - \frac{2}{n+2}\right)^{n^2}$ e $b_n = \left(\frac{2}{n+1} - 2\right)^{n^2}$.

(**a**) Calcolare se esistono $\lim_{n\to+\infty} a_n$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n$.

(**b**) Calcolare, se esiste, $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{b_n}\right|$.

(**c**) Calcolare, se esiste, $\lim_{n\to+\infty} (a_n - b_n)$.

57. [19 Luglio 2017 - **II Appello Estivo** - fila **B**] Siano date $a_n = \left(\frac{5}{n} - 5\right)^{n^2}$ e $b_n = \left(5 - \frac{5}{n+1}\right)^{n^2}$.

(**a**) Calcolare se esistono $\lim_{n\to+\infty} a_n$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n$.

(**b**) Calcolare, se esiste, $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{b_n}\right|$.

(**c**) Calcolare, se esiste, $\lim_{n\to+\infty} (a_n - b_n)$.

58. [1 Settembre 2017 - **I Appello Autunnale** - fila **A**] Confrontare gli ordini di infinito (dicendo anche se sono asintoticamente equivalenti) delle successioni che seguono:

$$a_n = \left(2^{n^2} + 3^{n^2}\right)^n, \qquad b_n = (2^n + 3^n)^{n^2}, \qquad c_n = (2+3)^{n^3}.$$

59. [1 Settembre 2017 - **I Appello Autunnale** - fila **B**] Confrontare gli ordini di infinito (dicendo anche se sono asintoticamente equivalenti) delle successioni che seguono:

$$a_n = \sqrt[n]{5^{n^3} + 3^{n^3}}, \qquad b_n = (5^n + 3^n)^n, \qquad c_n = \left(\sqrt[n]{5} + \sqrt[n]{3}\right)^{n^3}.$$

60. [15 Settembre 2017 - **II Appello Autunnale** - fila **A**] Confrontare gli ordini di infinito (dicendo anche se sono asintoticamente equivalenti) delle successioni che seguono:

$$a_n = \frac{(n^2+2)! + n^n}{(n^2)!}, \qquad b_n = \sqrt{1+n^6}, \qquad c_n = n^5, \qquad d_n = \ln(1+e^n).$$

61. [15 Settembre 2017 - **II Appello Autunnale** - fila **B**] Confrontare gli ordini di infinito (dicendo anche se sono asintoticamente equivalenti) delle successioni che seguono:

$$a_n = \frac{(2^n+1)! + n^n}{(2^n)!}, \qquad b_n = \sqrt{1+e^n}, \qquad c_n = e^n, \qquad d_n = \ln(1+e^n).$$