Analisi Matematica 1- Lista T1

Titolo nota

Quesiti sulle successioni

www.problemisvolti.it

Dire se sono vere o false le seguenti affermazioni, motivando la risposta:

1) Se (a_n) e (b_n) sono indeterminate allora $\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n)$ non esiste.

2) $a_n \to 0$ se e solo se $|a_n| \to 0$

3) $a_n \to 1$ se e solo se $|a_n| \to 1$

4) Se $a_n \simeq b_n \to +\infty$ allora $\sqrt{1+a_n} \simeq \sqrt{1+b_n}$

5) Se $a_n \simeq b_n \to +\infty$ allora $e^{a_n} \simeq e^{b_n}$

6) Se $a_n \simeq b_n \to +\infty$ allora $(a_n)^n \simeq (b_n)^n$

7) Se $a_n \to +\infty$, $b_n \to +\infty$ e $a_n = o(b_n)$ allora $b_n + a_n \simeq b_n$

8) Se $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $a_n \to 0$ allora a_n è decrescente

9) Se $a_n \to 2$ e $b_n \to 2$ allora $(a_n)^n \simeq (b_n)^n$

10) Se $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\sqrt[n]{a_n} \to \ell$ allora $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell$

11) Se $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell$ allora $\sqrt[n]{a_n} \to \ell$

12) Se $a_n \to \ell$ allora $\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \to \ell$

13) Se $\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \to \ell$ allora $a_n \to \ell$

14) Se $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $a_n \to \ell > 0$ allora $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \to \ell$

15) Se $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \to \ell > 0$ allora $a_n \to \ell$

16) Se $a_n \to +\infty$ allora $a_{n+1} \approx a_n$.

17) Se $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $a_n \to 0$ allora $a_n^{a_{n+1}} \to 1$

18) Se $a_n \to 0$ decrescendo strettamente allora $a_n^{a_{n+1}} \to 1$

19) Se $a_n \to 0$ decrescendo strettamente allora $a_{n+1}^{a_n} \to 1$

20) Se $a_n \to +\infty$ allora anche $\lfloor a_n \rfloor \to +\infty$ e si ha $a_n \approx \lfloor a_n \rfloor$

21) Se $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ allora anche $\lfloor a_n \rfloor$ tende a un limite finito

22) Se $a_n \to +\infty$ allora $a_n^{a_n} \approx \lfloor a_n \rfloor^{\lfloor a_n \rfloor}$

Dire, motivando la risposta, in quale dei seguenti casi A è compatto.

23) $A = [0,1]$ **24)** $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} - \{0\} \right\}$ **25)** $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} - \{0\} \right\} \cup \{0\}$

26) $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ **27)** Presa $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ definiamo $A = \{ a_n \mid n \in \mathbb{N} \} \cup \{\ell\}$

28) Presa (a_n) limitata definiamo $A = \{ \ell \in \mathbb{R} \mid \exists (a_{n_k})$ sottosuccessione di (a_n) t.c. $a_{n_k} \to \ell \}$

Trovare l'insieme A dei punti limite (e in particolare $\max\lim_{n\to+\infty}$ e $\min\lim_{n\to+\infty}$) di (a_n) nei casi seguenti:

29) $a_n = (-1)^n$

30) $a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n$

31) $a_n = \frac{1}{n} + \sin\frac{n\pi}{6}$

32) $a_n = (-n)^{\sin\frac{n\pi}{2} + \cos\frac{n\pi}{2}}$

33) $a_n = \log_2 n - \lfloor \log_2 n \rfloor$

34) $a_n = \sin n$

Dire, motivando le risposte, se sono vere o false le seguenti affermazioni:

35) Sia $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$, dove $\forall n \in \mathbb{N}$ K_n è compatto e contiene K_{n+1}. Allora $K \neq \emptyset$.

36) Sia $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$, dove $\forall n \in \mathbb{N}$ C_n è chiuso e contiene C_{n+1}. Allora $C \neq \emptyset$.

37) Se (a_n) è di Cauchy allora tutte le sue sottosuccessioni sono di Cauchy

38) Se da ogni sottosuccessione di (a_n) si può estrarre una sottosuccessione di Cauchy allora (a_n) è di Cauchy.

39) Date (a_n) e (b_n) si ha $\max\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n) \leq \max\lim_{n\to+\infty} a_n + \max\lim_{n\to+\infty} b_n$

40) È possibile scegliere (a_n) e (b_n) in modo che nella (39) valga la disuguaglianza stretta

41) Data (a_n) si ha $\min\lim_{n\to+\infty}(-a_n) = -\max\lim_{n\to+\infty} a_n$

42) Date (a_n) e (b_n) si ha $\max\lim_{n\to+\infty}(a_n-b_n) \leq \max\lim_{n\to+\infty} a_n - \min\lim_{n\to+\infty} b_n$

43) Data (a_n) si ha $\max\lim_{n\to+\infty}|a_n| = \left|\max\lim_{n\to+\infty} a_n\right|$