Analisi Matematica 1- Lista n. T3

Quesiti su Continuità e Uniforme Continuità

Titolo nota

www.problemisvolti.it

Dire, motivando la risposta, se le seguenti funzioni sono uniformemente continue negli insiemi a fianco indicati:

1) $f(x) = \frac{1}{x}$ in $A = [1,2]$, $B = \mathbb{R} - \{0\}$ e $C = [2, +\infty)$

2) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ in $A = [1,2]$, $B = \mathbb{R} - \{0\}$ e $C = [2, +\infty)$

3) $f(x) = \ln x$ in $A = [1,2]$, $B = (0, 1]$ e $C = [2, +\infty)$

4) $f(x) = \sqrt{x}$ in $A = [0,1]$, $B = [1, +\infty)$ e $C = [0, +\infty)$

5) $f(x) = (\sin x) \cdot \left(\sin \frac{1}{x}\right)$ in $A = (0,1]$, $B = [1, +\infty)$ e $C = \mathbb{R} - \{0\}$

6) $f(x) = \sin x$ in $A = [0, 2\pi]$ e $B = \mathbb{R}$

7) $f(x) = e^x$ in $A = [0,1]$, $B = (-\infty, 0]$ e $C = \mathbb{R}$

8) $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$ in $A = [1, +\infty)$, $B = (0, +\infty)$ e $C = \mathbb{R} - \{0\}$

9) $f(x) = \sin(x^2)$ in $A = [0,1]$ e $B = [0, +\infty)$

10) $f(x) = \dfrac{\sin(e^{x^2})}{1 + x^2}$ in $A = [-1, 1]$ e $B = \mathbb{R}$

11) $f(x) = (\lfloor x \rfloor)^2$ in $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [2n, 2n+1)$

Rispondere, motivando la risposta, ai seguenti quesiti:

12) Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua in ogni $x_0\in\mathbb{R}$. È vero che per ogni $A\subset\mathbb{R}$, se A è aperto allora anche $f^{-1}(A)$ è aperto?

13) Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua in ogni $x_0\in\mathbb{R}$. È vero che per ogni $C\subset\mathbb{R}$, se C è chiuso allora anche $f^{-1}(C)$ è chiuso?

14) Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua in ogni $x_0\in\mathbb{R}$. È vero che per ogni $K\subset\mathbb{R}$, se K è compatto allora anche $f^{-1}(K)$ è compatto?

15) Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua in ogni $x_0\in\mathbb{R}$. È vero che per ogni $A\subset\mathbb{R}$, se A è aperto allora anche $f(A)$ è aperto?

16) Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione tale che, per ogni $A\subset\mathbb{R}$, se A è aperto allora anche $f^{-1}(A)$ è aperto. Allora necessariamente f è continua in ogni $x_0\in\mathbb{R}$?

17) Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione che abbia la proprietà dei valori intermedi, cioè tale che se $I\subset\mathbb{R}$ è un intervallo, allora anche $f(I)$ è un intervallo. Allora necessariamente f è continua in ogni $x_0\in\mathbb{R}$?

18) Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione che mandi compatti in compatti, cioè tale che se $K\subset\mathbb{R}$ è un compatto allora anche $f(K)$ è compatto. Allora necessariamente f è continua in ogni $x_0\in\mathbb{R}$?

19) Siano $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ due funzioni uniformemente continue, allora necessariamente anche $f+g$ è uniformemente continua?

20) Siano $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ due funzioni uniformemente continue, allora necessariamente anche fg è uniformemente continua?

21) Siano $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ due funzioni uniformemente continue, allora necessariamente anche $f\circ g$ è uniformemente continua?

22) Cosa si può dire del quesito (20) se f e g sono anche limitate?

23) Siano $A,B\subset\mathbb{R}$ con $B\subset A$ e sia $f:A\to\mathbb{R}$ uniformemente continua su A. Allora f è anche uniformemente continua su B?

24) Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uniformemente continua e invertibile. Allora necessariamente anche la sua inversa è uniformemente continua?

25) Siano $A,B\subset\mathbb{R}$ ed $f:A\cup B\to\mathbb{R}$ uniformemente continua su A e su B. Allora necessariamente f è uniformemente continua anche su $A\cup B$?

26) Cosa succede se nel quesito (25) se si aggiunge l'ipotesi che A e B siano intervalli non disgiunti.

27) Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua e dotata di asintoti orizzontali per $x\to\pm\infty$. Allora necessariamente f è uniformemente continua?

28) Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua e dotata di asintoti obliqui per $x\to\pm\infty$. Allora necessariamente f è uniformemente continua?

29) La funzione dell'esercizio (11) è in contraddizione con la proprietà di sublinearità delle funzioni uniformemente continue?