Analisi Matematica 1 - Lista n. 1 - Risultati

Quesiti su Inf, Sup, Max e Min di insiemi e argomenti correlati.

Titolo nota

www.problemisvolti.it

Nei seguenti casi, dell'insieme $A \subset \mathbb{R}$, calcolare, se esistono, $\max(A)$, $\min(A)$, $\sup(A)$ e $\inf(A)$:

1) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$

INF(A) = 0
SUP(A) = 1
MIN(A) NON ESISTE
MAX(A) NON ESISTE

2) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\}$

INF(A) = 0
SUP(A) = 1
MIN(A) NON ESISTE
MAX(A) = 1

3) $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} - \{0\} \right\}$

INF(A) = 0
SUP(A) = 1
MIN(A) NON ESISTE
MAX(A) = 1

4) $A = \left\{ \frac{(-1)^n n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

INF(A) = -1
SUP(A) = 1
MIN(A) NON ESISTE
MAX(A) NON ESISTE

5) $A = \left\{ \frac{m}{n+1} \mid m, n \in \mathbb{N} \text{ con } m \leq n \right\}$

INF(A) = 0
SUP(A) = 1
MIN(A) = 0
MAX(A) NON ESISTE

6) $A = \left\{ \frac{1}{2^n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

INF(A) = 0
SUP(A) = 1
MIN(A) NON ESISTE
MAX(A) = 1

7) $A = \left\{ \frac{k}{2^n} \mid k, n \in \mathbb{N} \text{ con } 0 < k < 2^n \right\}$

INF(A) = 0
SUP(A) = 1
MIN(A) NON ESISTE
MAX(A) NON ESISTE

8) $A = \left\{ n + \frac{5}{n} \mid n \in \mathbb{N} - \{0\} \right\}$

INF(A) = $\frac{9}{2}$
SUP(A) = $+\infty$
MIN(A) = $\frac{9}{2}$
MAX(A) NON ESISTE

9) $A = \left\{ n + \frac{5000}{n} \mid n \in \mathbb{N} - \{0\} \right\}$

INF(A) = $71 + \frac{5000}{71}$
SUP(A) = $+\infty$
MIN(A) = $71 + \frac{5000}{71}$
MAX(A) NON ESISTE

10) $A = \left\{ x + \frac{1}{x} \mid x \in \mathbb{R},\ x > 0 \right\}$

INF(A) = 2
SUP(A) = $+\infty$
MIN(A) = 2
MAX(A) NON ESISTE

11) $A = \left\{ \frac{n+1}{m+1} + \frac{m+1}{n+1} \mid n, m \in \mathbb{N} \right\}$

INF(A) = 2
SUP(A) = $+\infty$
MIN(A) = 2
MAX(A) NON ESISTE

12) $A = \left\{ \frac{2m+1}{2n+2} + \frac{2n+2}{2m+1} \mid n, m \in \mathbb{N} \right\}$

INF(A) = 2
SUP(A) = $+\infty$
MIN(A) = NON ESISTE
MAX(A) NON ESISTE

13) $A = \left\{ \frac{n\sqrt{2}}{m+1} \mid n, m \in \mathbb{N} \right\}$

INF(A) = 0
SUP(A) = $+\infty$
MIN(A) = 0
MAX(A) NON ESISTE

14) $A = \left\{ \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

IL SIMBOLO $\lfloor x \rfloor$ SIGNIFICA "PARTE INTERA DI x"

INF(A) = 0
SUP(A) = 1
MIN(A) = 0
MAX(A) NON ESISTE

15) Dimostrare che l'insieme A definito al punto (13) ha la seguente proprietà: comunque si prendano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che $0 < \alpha < \beta$ è sempre possibile trovare $x \in A$ tale che $\alpha < x < \beta$. [Suggerimento: Prima trovare $m_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{\sqrt{2}}{m_0+1} < \beta - \alpha$, Poi mostrare che il più piccolo multiplo di $\frac{\sqrt{2}}{m_0+1}$, che supera α, non può superare β]

16) Mostrare, usando eventualmente (15), che $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ è denso.

[Suggerimento: (15) fornisce un insieme di irrazionali denso in $[0, +\infty)$; moltiplicando tutto per (-1) se ne ottiene uno denso in $(-\infty, 0]$.]