Analisi Matematica 1 - Lista n. 2

Quesiti sui primi elementi di Topologia di R.

www.problemisvolti.it

Ricordando che $I_\rho(x_0)$ è l'intorno di x_0 di raggio ρ, dire chi sono i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

1) $I_3(2) \cap I_3(-2) = (-1, 1)$

2) $I_3(2) \cup I_3(-2) = (-5, 5)$

3) $I_3\left(\frac{3}{2}\right) \setminus I_1(0) = \left(-\frac{3}{2}, -1\right] \cup \left[1, \frac{9}{2}\right)$

4) $I_3(2) \cap \left(I_{\frac{1}{2}}(1)\right)^c = \left(-1, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, 5\right)$

Trovare le seguenti unioni e/o intersezioni di famiglie infinite di insiemi:

5) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{n+1}, +\infty\right) = (0, +\infty)$

6) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n+1}, +\infty\right) = [0, +\infty)$

7) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n+1}, 1+\frac{1}{n+1}\right) = [0, 1]$

8) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\left(-\infty, -\frac{1}{n+1}\right] \cup \left[1+\frac{1}{n+1}, +\infty\right)\right) = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

9) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(0, \frac{1}{n+1}\right) = \emptyset$

10) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left[0, \frac{1}{n+1}\right) = \{0\}$

11) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{-n, n\} = \mathbb{Z}$

12) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{m\in\mathbb{Z}} \left\{\frac{m}{n+1}\right\}\right) = \mathbb{Q}$

13) $\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(q-\frac{1}{n+1}, q+\frac{1}{n+1}\right)\right) = \mathbb{Q}$

14) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \left(q-\frac{1}{n+1}, q+\frac{1}{n+1}\right)\right) = \mathbb{R}$

15) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \left[0, 1+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{m+1}\right]\right) = [0, 1]$

16) $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left[0, 1+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{m+1}\right]\right) = [0, 1)$

Nei seguenti casi, dell'insieme $A \subset \mathbb{R}$, determinare punti interni, esterni, di frontiera, di accumulazione e isolati. Fare poi lo stesso anche con il complementare di A. Infine dire se A o il suo complementare sono insiemi aperti, chiusi, densi o discreti.

NOTA: METTEREMO LE RISPOSTE SOLO PER L'INSIEME A, NON PER A^c

17) $A = [-1, +\infty)$

A è CHIUSO
$\mathring{A} = (-1, +\infty)$ $\partial A = \{-1\}$
$DA = [-1, +\infty)$ Nessun punto isolato

18) $A = (-1, 1)$

A è APERTO
$\mathring{A} = (-1, 1)$ $DA = [-1, 1]$
$\partial A = \{-1, 1\}$ Nessun punto isolato

19) $A = \{1\}$

A è CHIUSO e DISCRETO
$\mathring{A} = \emptyset \quad \partial A = \{1\} \quad DA = \emptyset$
Punti isolati $= \{1\}$

20) $A = \mathbb{R}$

A è CHIUSO, APERTO e DENSO
$\mathring{A} = \mathbb{R} \quad \partial A = \emptyset \quad DA = \mathbb{R}$
nessun punto isolato

21) $A = \mathbb{Z}$

A è CHIUSO e DISCRETO
$\mathring{A} = \emptyset \quad \partial A = \mathbb{Z} \quad DA = \emptyset$
Punti isolati $= \mathbb{Z}$

22) $A = (0,1) \cup (1,2)$

A è APERTO
$\mathring{A} = A \quad \partial A = \{0,1,2\} \quad DA = [0,2]$
Nessun Punto isolato

23) $A = \mathbb{Q}$

A è DENSO
$\mathring{A} = \emptyset \quad \partial A = \mathbb{R} \quad DA = \mathbb{R}$
Nessun Punto Isolato

24) $A = \left\{ \frac{1}{n+1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$

A è DISCRETO
$\mathring{A} = \emptyset \quad \partial A = A \cup \{0\} \quad DA = \{0\}$
Punti Isolati $= A$

25) $A = \left\{ \frac{1}{n+1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$

A è CHIUSO
$\mathring{A} = \emptyset \quad \partial A = A \quad DA = \{0\}$
Punti Isolati $= A - \{0\}$

26) $A = \left\{ \frac{m}{2^n} \,\middle|\, n,m \in \mathbb{N},\ 0 < m < 2^n \right\}$

$\mathring{A} = \emptyset \quad \partial A = [0,1] = DA$
Nessun Punto isolato

27) $A = \left\{ \sqrt{n} - [\sqrt{n}] \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$

$\mathring{A} = \emptyset \quad \partial A = [0,1] = DA$
Nessun punto isolato

28) $A = \left\{ \sqrt{n} - \sqrt{m} \,\middle|\, n,m \in \mathbb{N} \right\}$

A è DENSO
$\mathring{A} = \emptyset \quad \partial A = \mathbb{R} = DA$
Nessun Punto Isolato

29) Dimostrare che gli unici sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che sono sia chiusi che aperti sono solo $\emptyset$ e tutto $\mathbb{R}$.

30) È vero che un insieme discreto non ha punti di accumulazione? Se vero, dimostrarlo. Se è falso, esibire un controesempio.
[È FALSO: BASTA PRENDERE $A = \left\{ \frac{1}{n+1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$]

Di ciascuna delle seguenti relazioni tra insiemi, dire se è **vera per ogni $A \subset \mathbb{R}$** oppure se è **falsa per qualche $A \subset \mathbb{R}$**. Nel primo caso dimostrarla, nel secondo caso trovare almeno un $A \subset \mathbb{R}$ che la rende falsa.
[Notazioni: A^c = complementare di A, $\mathring{A}$ = parte interna di A, $\overline{A}$ = chiusura di A, ∂A = frontiera di A, DA = derivato di A]

[SIGNIFICA: "PARTE INTERNA DELLA CHIUSURA"]

31) $\mathring{A} \subset \mathring{\overline{A}}$ VERO

32) $\mathring{A} = \mathring{\overline{A}}$ FALSO

33) $\left(\mathring{A}\right)^c = \overline{A^c}$ VERO

34) $\left(\overline{A}\right)^c = \left(A^c\right)^o$ VERO

[$(\dots)^o$ SIGNIFICA PARTE INTERNA DI...]

35) $\partial A = \partial(\mathring{A})$ FALSO

36) $\overline{A} = \overline{\overline{A}}$ VERO

37) $\partial(\partial A) = \partial A$ FALSO

38) $\partial\left(\overline{A^c}\right) = \partial(\mathring{A})$ VERO