Analisi Matematica 1- Lista n. 3

Quesiti elementari sulle funzioni.

Titolo nota

www.problemisvolti.it

Per ciascuna delle seguenti funzioni determinare gli insiemi indicati a fianco:

1) $f(x)=x^2-3x+2$ Trovare: $f(0)$, $f^{-1}(0)$, $f^{-1}([0,2))$, $f^{-1}(f(4))$

$\{2\}$, $\{1,2\}$, $(0,1]\cup[2,3)$, $\{-1,4\}$

2) $f(x)=x^6+x^4+x^2+1$ Trovare: $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(1)$

$\emptyset$, $\{0\}$

3) $f(x)=x^4-2x^2+1$ Trovare: $f^{-1}((0,1])$, $f^{-1}((-\infty,0))$

$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]-\{-1,1\}$, $\emptyset$

In ciascuno dei casi seguenti dire se f è **iniettiva** e/o **suriettiva**:

4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto 2x$ — biettiva

5) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $x\mapsto 2x$ — iniettiva

6) $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$, $x\mapsto 2x$ — biettiva

7) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto 2x$ — iniettiva

8) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^2$ — niente

9) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$, $x\mapsto x^2$ — suriettiva

10) $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^2$ — iniettiva

11) $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, $x\mapsto x^2$ — biettiva

12) $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$, $x\mapsto x^2$ — niente

13) $f:\mathbb{Q}^+\to\mathbb{Q}^+$, $x\mapsto x^2$ — iniettiva

Nei seguenti casi calcolare $f\circ g$ e $g\circ f$:

14) $f(x)=x^2$, $g(x)=x+1$

$\boxed{(f\circ g)(x)=(x+1)^2 \quad (g\circ f)(x)=x^2+1}$

15) $f(x)=x^2$, $g(x)=\sqrt{x}$

$\boxed{(f\circ g)(x)=x \text{ definita solo per } x\geq 0 \quad (g\circ f)(x)=|x|}$

16) $f(x)=x^4$, $g(x)=\sqrt{x}$

$\boxed{(f\circ g)(x)=x^2 \text{ definita solo per } x\geq 0 \quad (g\circ f)(x)=x^2}$

17) $f(x)=x^6$, $g(x)=\sqrt[3]{x}$

$\boxed{(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)=x^2}$

18) $f(x) = e^{x+1}$, $g(x) = \ln x$

$(f \circ g)(x) = e \cdot x$ definito solo per $x > 0$

$(g \circ f)(x) = x + 1$

19) $f(x) = e^x$; $g(x) = \ln(x+1)$

$(f \circ g)(x) = x + 1$ definita solo per $x > -1$

$(g \circ f)(x) = \ln(e^x + 1)$

Di ciascuna delle seguenti funzioni dire se **pari**, **dispari**, **crescente**, **decrescente** e/o **periodica**:

20) $f(x) = x^3 + x$ — • dispari • strettamente crescente

21) $f(x) = x^4 - x^2$ — pari

22) $f(x) = x^3 + x^2$ — niente

23) $f(x) = \sin^2 x$ — pari, periodica (periodo $= \pi$)

24) $f(x) = \sin(x^2)$ — pari

25) $f(x) = \tan(x^3)$ — dispari

26) $f(x) = \sin(e^x)$ — niente

27) $f(x) = e^{\sin x}$ — periodica (periodo $= 2\pi$)

28) $f(x) = \ln(\ln(\ln x)))$ — strettamente crescente

29) $f(x) = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{1 + e^{-x}}}$ — strettamente decrescente

30) $f(x) = 2x - \lfloor 2x \rfloor$ — periodica con periodo $\frac{1}{2}$

31) $f(x) = 2x - 2\lfloor x \rfloor$ — periodica con periodo 1

32) $f(x) = 2x + \lfloor 2x \rfloor$ — strettamente crescente

33) $f(x) = 2|x| + \lfloor 2|x| \rfloor$ — pari

34) $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$ — dispari

35) $\sqrt{\arctan \frac{1}{x}}$ — strettamente decrescente

36) $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ — debolmente crescente, dispari

37) $f(x) = \dfrac{1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}$ (con $0 < x \leq 1$) — debolmente crescente

Trovare i domini delle seguenti funzioni:

38) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$ — $(-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$

39) $f(x) = \ln(x^5 - x^3)$ — $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

40) $f(x) = \sqrt{\ln \frac{1}{x^2 - 4x + 4}}$ — $[1, 2) \cup (2, 3]$

41) $f(x) = \sqrt{\ln(\ln(\ln x))}$ — $[e^e, +\infty)$

42) $f(x)=\sqrt{|x|-x^2}$ $\quad [-1,1]$

43) $f(x)=\sqrt{1-x-\sqrt{x+1}}$ $\quad [-1,0]$

44) $f(x)=\ln\left(\sqrt{24-3x^2+12x}-3x\right)$ $\quad [2-2\sqrt{3},2)$

45) $f(x)=\sqrt{2\sin 2x+1}+\ln\left(\cos\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\quad \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[-\frac{\pi}{12}+4k\pi,\frac{\pi}{3}+4k\pi\right)$

46) $f(x)=\frac{1}{1+\cos(x^2)}$ $\quad \mathbb{R}-\left\{\pm\sqrt{(2k+1)\pi}\ \middle|\ k\in\mathbb{N}\right\}$

47) $f(x)=\frac{1}{\tan(\pi\sin x)}$ $\quad \left\{x\in\mathbb{R}\ \middle|\ x\neq\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3} \text{ e } x\neq k\pi \text{ per ogni } k\in\mathbb{Z}\right\}$

Nei seguenti casi dire se f è invertibile e, in caso affermativo, determinare f^{-1}:

48) $f:[0,2]\to[0,4]$, $x\mapsto x^2$ $\quad f^{-1}(x)=\sqrt{x}$

49) $f:[-1,1]\to[0,1]$, $x\mapsto x^2$ $\quad$ NO

50) $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}-\{0\}$, $x\mapsto\frac{1}{x}$ $\quad f^{-1}(x)=\frac{1}{x}$

51) $f:\left[-\frac{3\pi}{2},-\pi\right]\to[0,1]$, $x\mapsto\sin x$ $\quad f^{-1}(x)=-\pi-\arcsin x$

52) $f:\left[-\frac{3\pi}{2},-\pi\right]\to[-1,0]$, $x\mapsto\cos x$ $\quad f^{-1}(x)=-2\pi+\arccos x$

53) $f:\left(-\frac{5\pi}{2},-\frac{3\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\tan x$ $\quad f^{-1}(x)=-2\pi+\arctan x$

Operando opportune trasformazioni sui grafici di funzioni già note (cioè x^2, $\frac{1}{x}$, 2^x, $\sin x$, $\cos x$ e $\tan x$) disegnare il grafico delle seguenti funzioni:

PER I PROBLEMI DAL 54 AL 70 NON RIPORTIAMO IL RISULTATO (NON CI STA)

54) $f(x)=(x-1)^2+1$

55) $f(x)=x^2-6x+8$

56) $f(x)=|x^2-1|$

57) $f(x)=x^2-6|x|+8$

58) $f(x)=\left|(|x|-1)^2-1\right|$

59) $f(x)=\frac{1}{x+1}$

60) $f(x)=\frac{3x+1}{x+1}$

61) $f(x)=\frac{1}{|x|+1}$

62) $f(x)=\left|2+\frac{1}{x+1}\right|$

63) $f(x)=2^{|x|}$

64) $f(x) = |2^x - 1|$

65) $f(x) = |2^{|x|} - 2|$

66) $f(x) = |2^{|x|-1} - 4|$

67) $f(x) = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

68) $f(x) = \tan \frac{x + \pi}{2}$

69) $f(x) = \cos x - \sqrt{3} \sin x$

70) Spiegare come costruire il generico grafico di $g(x) = \dfrac{Ax + B}{Cx + D}$ a partire da quello di $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

71) Trovare $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che l'insieme di tutti i suoi periodi sia $\{q\sqrt{2} \mid q \in \mathbb{Q}, q > 0\}$. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = q \cdot \sqrt{2} \text{ con } q \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

72) Esiste una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, non costante, ma avente come periodi sia 1 che $\sqrt{2}$? Se sì trovarla, se no dimostrare che non esiste. $\boxed{\text{SI}}$: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = a + b\sqrt{2} \text{ con } a, b \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

73) Esiste una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, non costante, ma avente come periodi tutti gli irrazionali positivi? Se sì trovarla, se no dimostrare che non esiste. $\boxed{\text{NO}}$