Analisi Matematica 1- Lista n. 14

Calcolo della derivata di una funzione in 1 variabile

Titolo nota

www.problemisvolti.it

Calcolare la derivata delle seguenti funzioni:

1) $f(x)=\left((x+1)^3-1\right)^4$ $\quad \boxed{f'(x)=12\left((x+1)^3-1\right)^3(x+1)^2}$

2) $f(x)=\ln^2(x^2)$ $\quad \boxed{f'(x)=\frac{4\ln(x^2)}{x}}$

3) $f(x)=\arctan\frac{x+2}{2x+1}$ $\quad \boxed{f'(x)=\frac{-3}{5x^2+8x+5}}$ PER $x\neq -\frac{1}{2}$

4) $f(x)=e^{e^x}$ $\quad \boxed{f'(x)=e^{e^x}\cdot e^x}$

5) $f(x)=\ln\sqrt{\frac{x+2}{2x+1}}$ $\quad \boxed{f'(x)=\frac{-3}{2(x+2)(2x+1)}}$ PER $x\in(-\infty,-2)\cup(-\frac{1}{2},+\infty)$

6) $f(x)=\log_2(x^2+1)$ $\quad \boxed{f'(x)=\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{2x}{x^2+1}}$

7) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2+x+1}}$ $\quad \boxed{f'(x)=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}+\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}}$

8) $f(x)=\ln\left|\ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\right|$ $\quad \boxed{f'(x)=\frac{2x}{(1+x^2)\ln(1+x^2)}}$

9) $f(x)=\log_x(x^2+1)$ $\quad \boxed{f'(x)=\frac{2x^2\ln x-(x^2+1)\ln(x^2+1)}{x(x^2+1)\ln^2 x}}$

10) $f(x)=\arctan\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ $\quad \boxed{f'(x)=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}}$

11) $f(x)=x\arctan x+\ln\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}$ $\quad \boxed{f'(x)=\arctan x}$

12) $f(x)=\arctan(\ln x)+\arctan(\log_x e)$ $\quad \boxed{f'(x)=0}$ PER $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$

13) $f(x)=x^x$ $\quad \boxed{f'(x)=x^x(\ln x+1)}$

14) $f(x)=(\sqrt{x})^{\sqrt{x}}$ $\quad \boxed{f'(x)=\frac{1}{4}x^{\frac{\sqrt{x}-1}{2}}(2+\ln x)}$

15) $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ $\quad \boxed{f'(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right)}$

16) $f(x)=x^{x^x}$ $\quad \boxed{f'(x)=x^{x^x}\cdot x^x\cdot\left((\ln x)^2+\ln x+\frac{1}{x}\right)}$

17) Calcolare la derivata 100-esima di $f(x)=xe^x$. $\quad \boxed{f^{(100)}(x)=(x+100)e^x}$

18) La derivata 100-esima di $f(x)=\tan x$ è della forma $P(\tan x)$ dove P è un opportuno polinomio. Qual è il grado di P?

$\boxed{\text{P ha grado 101}}$

19) Conveniamo di indicare con S l'operatore che agisce nel modo seguente: $S(f)=f-f'$. Ad esempio $S(\sin x)=\sin x-\cos x$ mentre $S(e^x)=e^x-e^x=0$.

a) Calcolare $S(S(xe^x))$. $\boxed{=0}$

b) Calcolare $\underbrace{S(S(\cdots S}_{51\ \text{volte}}(x^{50}e^x)\cdots))$. $\boxed{=0}$

c) Qual è il più grande intero n tale che $\underbrace{S(S(\cdots S}_{101\ \text{volte}}(x^n e^x)\cdots)) = 0$? $\boxed{n=100}$

d) Dire come bisogna cambiare S se si vuole che (a), (b) e (c) diano le stesse risposte scrivendo $x^n e^{3x}$ al posto di $x^n e^x$. $\boxed{S(f)=3f-f'}$

Calcolare, se esiste, la derivata per $x=0$, delle seguenti funzioni:

20) $f(x)=\begin{cases} \sin x & \text{se } x\le 0 \\ x & \text{se } x>0 \end{cases}$ $\boxed{f'(0)=1}$

21) $f(x)=\begin{cases} e^x & \text{se } x<0 \\ \cos x & \text{se } x\ge 0 \end{cases}$ $\boxed{\text{NON ESISTE}}$

22) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{se } x\in\mathbb{Q} \\ -x^2 & \text{se } x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$ $\boxed{f'(0)=0}$

23) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{se } x\in\mathbb{Q} \\ x & \text{se } x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$ $\boxed{\text{NON ESISTE}}$

24) Data $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & \text{se } x\ne 0 \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases}$ calcolare $f'(x)$ e mostrare che, per $x=0$, $f'(x)$ non è continua.

$$\boxed{f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & \text{se } x\ne 0 \\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0 & \text{se } x=0 \end{cases}}$$

25) Data $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x\ne 0 \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases}$ mostrare che, per ogni $n\in\mathbb{N}$, $f^{(n)}(0)=0$.

BASTA MOSTRARE CHE, PER OGNI $n\in\mathbb{N}$, $f^{(n)}(x)=P(\frac{1}{x})\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$, con $P(x)$ POLINOMIO OPPORTUNO.

26) Dire, motivando la risposta, se esiste $g\in C^\infty(\mathbb{R})$ non identicamente nulla tale che $g(x)=0$ se $|x|\ge 1$. $\boxed{\text{SI}}$

DETTA $h(x)=\begin{cases} 0 & \text{per } x\le 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{per } x>0 \end{cases}$ BASTA PRENDERE $g(x)=h(1+x)\cdot h(1-x)$

Delle funzioni seguenti, calcolare la derivata della funzione inversa nel punto y_0 a fianco indicato.

27) $f(x)=x+e^x$ $\quad y_0=1$ $\quad \boxed{(f^{-1})'(1)=\frac{1}{2}}$

28) $f(x)=x+\sin x$ $\quad y_0=\frac{\pi}{2}+1$ $\quad \boxed{(f^{-1})'(\frac{\pi}{2}+1)=1}$

29) $f(x)=x^7+x^3+8$ $\quad y_0=10$ $\quad \boxed{(f^{-1})'(10)=\frac{1}{10}}$

30) $f(x)=\sqrt{x+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{x}{2}}$ $\quad y_0=\frac{3}{2}$ $\quad \boxed{(f^{-1})'(\frac{3}{2})=\frac{4\pi+1}{12\pi}}$